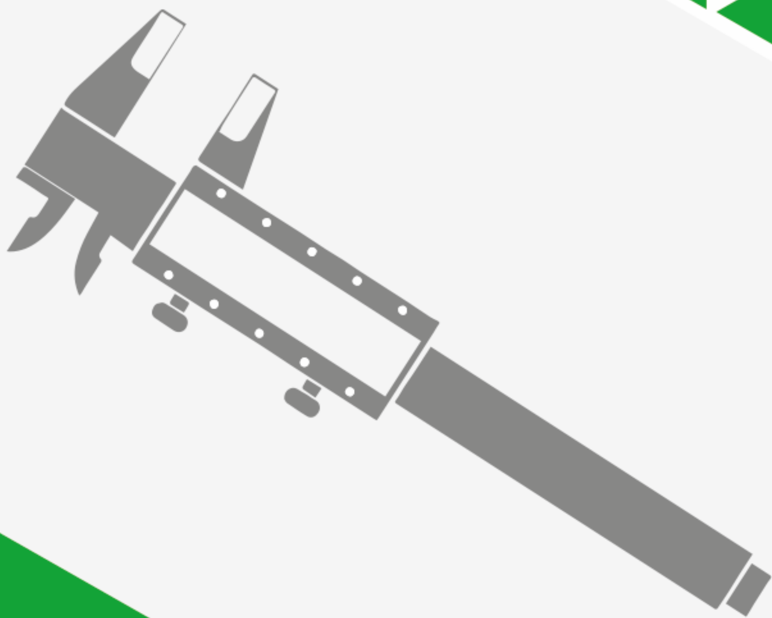
PROGRAMME SYSTÈME QUALITÉ DE L'AFRIQUE DE L'OUEST (PSQAO)
APPUI À LA MISE EN ŒUVRE DE LA POLITIQUE QUALITÉ DE LA CEDEAO (ECOQUAL)
FINANCÉ PAR L'UNION EUROPÉENNE
EXÉCUTÉ PAR L'ONUDI

Union Européenne

ECOMET

COMITÉ COMMUNAUTAIRE DE MÉTROLOGIE DE LA CEDEAO



GUIDE D'EVALUATION ET D'EXPRESSION DES INCERTITUDES DE MESURE

PSQAO Programme Système Qualité de l'Afrique de l'Ouest

ECOWAQ

ONUDI
ORGANISATION DES NATIONS UNIES POUR LE DÉVELOPPEMENT INDUSTRIEL

REMERCIEMENTS

Ce document est publié par le Programme Système Qualité de l'Afrique de l'Ouest (PSQAO) mis en œuvre par l'Organisation des Nations Unies pour le développement industriel (ONUDI), financé par l'Union européenne, en appui à la Communauté Economique des États de l'Afrique de l'Ouest (CEDEAO). Il a été préparé sous la coordination générale de M. Bernard Bau, spécialiste du développement industriel au Département du commerce, de l'investissement et de l'innovation (TII) de l'ONUDI et Responsable du PSQAO et sous la coordination technique de M. Aka Jean Joseph Kouassi, Conseiller technique principal du PSQAO pour l'ONUDI. Ce document fait partie d'une série de guides de métrologie préparés par M. Djakaridja Nyamba, expert en métrologie de l'ONUDI/PSQAO et validés par le Comité communautaire de métrologie de la CEDEAO (ECOMET). Nous reconnaissons la précieuse contribution des membres d'ECOMET: M. Paul Date (président), M. Gabriel Ahissou, M. Issa Sawadogo, M. Jose Antonio Carvalho, M. Déza Emmanuel Zabo, M. Jallow Amadou Tijan, M. Sanoussy Diakhaby, M. Cesario Augusto Nunes Correia, M. Shérif Abdul Rahman, M. Drissa Daou, M. Boubacar Issa, M. Bede Edqu Obayi, M. Ibrahima Sarr et M. Frank Martin. L'édition et la révision ont été réalisées par M. Christophe Marianne. La mise en forme du texte et le contrôle qualité ont été effectués par M. Christian Lasser et la réalisation graphique a été assurée par M. Doudou Ndiaye et M. Omar Tajmouati. Nos remerciements vont à toutes les autres personnes qui, bien que non citées ici, ont contribué à la réalisation de cette publication à travers leurs commentaires constructifs.

VERSION ORIGINALE

La version française de ce document est la version originale. Ce document est appelé à être traduit dans les autres langues de la CEDEAO. En cas de contradiction entre les termes de la traduction et les termes de ce document, ce dernier prévaudra. Ce document ne peut être reproduit pour la vente.

Table des matières

1 Introduction

De plus en plus, il est reconnu qu'une évaluation correcte de l'incertitude de mesure fait partie intégrante de la gestion de la qualité et des coûts de mesure. L'évaluation des incertitudes de mesure permet de mieux comprendre l'importance relative des différentes grandeurs d'influence sur les mesures.

Ce guide donne des orientations pour l'évaluation des contributions en termes d'incertitude, l'expression du résultat de mesure et est destiné à être applicable à la plupart des résultats de mesure des laboratoires d'étalonnage ainsi que pour les domaines connexes.

L'objectif d'une mesure est de déterminer la valeur du mesurande, c'est-à-dire la valeur de la quantité particulière à mesurer. Le résultat de mesure n'est qu'une approximation ou une estimation de la valeur du mesurande et n'est donc complet que s'il est accompagné d'un énoncé de l'incertitude associée à cette estimation.

Ce document donne des exemples illustrant l'application de la méthode décrite dans ce guide dans des problèmes de mesure spécifiques d'étalonnage. L'évaluation de l'incertitude de mesure sera également abordée dans d'autres domaines spécifiques (les méthodes d'étalonnage avec des exemples élaborés spécifiques).

La meilleure capacité de mesure ou d'étalonnage, en anglais « Best measurement capabilities (BMC) », est définie comme la plus petite incertitude de mesure qu'un laboratoire puisse obtenir dans le cadre de son accréditation, lorsqu'il effectue des étalonnages d'instruments de mesure. L'évaluation de la meilleure capacité de mesure des laboratoires d'étalonnage accrédités doit être fondée sur la méthode décrite dans le présent document mais doit normalement être étayée ou confirmée par des preuves expérimentales. Il contribuera également à aider les organismes d'accréditation à évaluer la meilleure capacité de mesure et pourra être cité comme référence dans le cadre de l'élaboration des guides d'accréditation.

Les Instituts Nationaux de Métrologie (INM) des Etats membres de la CEDEAO pourront également s'appuyer sur ce Guide, dans le cadre de l'élaboration de leurs Aptitudes en matière de mesure et d'étalonnages (CMCs) et leurs publications dans la base de données du Bureau International des Poids et Mesures (BIPM), la KCDB.

2 Domaine d'application

Le présent guide a pour objet d'harmoniser les méthodes d'évaluation des incertitudes de mesure. La méthode d'évaluation décrite dans ce guide est conforme au Guide pour l'expression des incertitudes de mesure (GUM). Le GUM établit des règles générales d'évaluation et d'expression de l'incertitude de mesure pouvant être suivies dans la plupart des domaines de mesures physiques, le présent document se concentre sur la méthode la mieux adaptée aux mesures en laboratoire d'étalonnage et décrit une méthode harmonisée d'évaluation et de détermination de l'incertitude de mesure. Il traite des sujets suivants :

- Les définitions de base ;
- Les méthodes d'évaluation de l'incertitude sur la mesure des grandeurs d'entrée (Type A et Type B) ;
- La relation entre l'incertitude de mesure de la variable de sortie et l'incertitude de mesure des variables d'entrée (incertitude type combinée) ;
- L'incertitude élargie de la mesure de la variable de sortie ;
- L'expression du résultat de la mesure ;

- Présentation d'une méthode pas à pas pour évaluer l'incertitude de mesure et exprimer le résultat de la mesure.

3 Références documentaires

[1] JCGM 100: 2008, Évaluation des données de mesure — Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure (GUM 1995 avec corrections mineures)

[2] JCGM 200: 2012, Vocabulaire international de métrologie – Concepts fondamentaux et généraux et termes associés (VIM, 3e édition) (JCGM 200: 2008 avec corrections mineures)

4 Généralités sur la mesure et définition du concept d'incertitude

Les incertitudes de mesure découlent des erreurs opérées lors des opérations de mesurage. Une erreur dans le résultat de la mesure est considérée comme ayant deux composants, à savoir un composant aléatoire et un composant systématique. Les erreurs aléatoires résultent vraisemblablement de variations temporelles et spatiales imprévisibles, ou stochastiques, des grandeurs d'influence. L'erreur systématique provient d'un effet reconnu d'une grandeur d'influence sur un résultat de mesure.

L'incertitude du résultat d'une mesure est généralement constituée de plusieurs composantes que l'on peut regrouper en deux types selon la méthode utilisée pour estimer leurs valeurs numériques :

- Type A - celles évaluées par les méthodes statistiques,
- Type B - celles évaluées par d'autres moyens.

Avant d'aborder la question, il serait souhaitable de donner les définitions des termes nécessaires à une meilleure compréhension du sujet.

4.1 Termes et définitions

4.1.1 Termes métrologiques généraux

Meilleure capacité de mesure :

La plus petite incertitude de mesure qu'un laboratoire puisse obtenir dans le cadre de son accréditation pour les opérations d'étalonnage plus ou moins routiniers.

Le terme « incertitude »

Le mot « incertitude » signifie doute. Ainsi, dans son sens le plus large, « incertitude de mesure » signifie doute sur la validité du résultat d'un mesurage. Comme on ne dispose pas de plusieurs mots pour ce concept général d'incertitude et pour les grandeurs spécifiques qui fournissent des mesures quantitatives du concept, par exemple l'écart-type, l'utilisation du mot « incertitude » s'impose pour ces deux sens différents.

Incertitude (de mesure)

Paramètre, associé au résultat d'un mesurage, qui caractérise la dispersion des valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuées au mesurande.

NOTE 1 : Le paramètre peut être, par exemple, un écart-type (ou un multiple de celui-ci) ou la demi-largeur d'un intervalle de niveau de confiance déterminé.

NOTE 2 : L'incertitude de mesure comprend, en général, plusieurs composantes. Certaines peuvent être évaluées à partir de la distribution statistique des résultats de séries de mesurages et peuvent être caractérisées par des écarts-types expérimentaux. Les autres composantes, qui peuvent aussi être caractérisées par des écarts-types, sont évaluées en admettant des lois de probabilité, d'après l'expérience acquise ou d'après d'autres informations.

NOTE 3 : Il est entendu que le résultat du mesurage est la meilleure estimation de la valeur du mesurande, et que toutes les composantes de l'incertitude, y compris celles qui proviennent d'effets systématiques, telles que les composantes associées aux corrections et aux étalons de référence, contribuent à la dispersion.

4.1.2 Termes spécifiques

Incertitude-type
Incertitude du résultat d'un mesurage exprimée sous la forme d'un écart-type.

Evaluation de Type A
Méthode d'évaluation de l'incertitude par l'analyse statistique de séries d'observations.

Evaluation de Type B
Méthode d'évaluation de l'incertitude par des moyens autres que l'analyse statistique de séries d'observations.

Incertitude-type composée

L'incertitude-type du résultat d'un mesurage, lorsque ce résultat est obtenu à partir des valeurs d'autres grandeurs, correspondant à la racine carrée d'une somme de termes, ces termes étant les variances ou covariances de ces autres grandeurs, pondérées selon la variation du résultat de mesure en fonction de celle de ces grandeurs.

Incertitude élargie

Grandeur définissant un intervalle, autour du résultat d'un mesurage, dont on puisse s'attendre à ce qu'il comprenne une fraction élevée de la distribution des valeurs qui pourraient être attribuées raisonnablement au mesurande.

NOTE 1 : La fraction peut être considérée comme la probabilité ou le niveau de confiance de l'intervalle.
NOTE 2 : L'association d'un niveau de confiance spécifique à l'intervalle défini par l'incertitude élargie nécessite des hypothèses explicites ou implicites sur la loi de probabilité caractérisée par le résultat de mesure et son incertitude-type composée. Le niveau de confiance qui peut être attribué à cet intervalle ne peut être connu qu'avec la même validité que celle qui se rattache à ces hypothèses.
NOTE 3 : L'incertitude élargie est aussi appelée *incertitude globale*.

Facteur d'élargissement

Facteur numérique utilisé comme multiplicateur de l'incertitude-type composée pour obtenir l'incertitude élargie.

NOTE : Un facteur d'élargissement, *k*, a sa valeur typiquement comprise entre 2 et 3.

Incertitude type relative de la mesure

L'incertitude type d'une quantité divisée par l'estimation de cette quantité.

Mesurage

L'objectif d'un **mesurage** consiste à déterminer la **valeur** du **mesurande**, c'est-à-dire la valeur de la **grandeur particulière** à mesurer. En conséquence, un mesurage commence par une définition appropriée du mesurande, de la **méthode de mesure** et de la **procédure de mesure**.

NOTE on considère que les termes « valeur d'un mesurande » (ou d'une grandeur) et « valeur vraie d'un mesurande » (ou d'une grandeur) sont deux termes équivalents.

En général, le **résultat d'un mesurage** est seulement une approximation ou **estimation** de la valeur du mesurande et, de ce fait, est seulement complet lorsqu'il est accompagné par une expression de l'**incertitude** de cette estimation.

Dans la pratique, la spécification ou la définition exigée pour le mesurande est dictée par l'**exactitude de mesure** exigée pour le mesurage. Le mesurande doit être défini de façon suffisamment complète en rapport avec l'exactitude exigée de sorte que sa valeur soit unique pour tous les objectifs pratiques associés au mesurage. C'est dans ce sens qu'on utilise l'expression « valeur du mesurande ».

Si l'on doit déterminer la longueur nominale d'une barre d'acier de longueur un mètre au micromètre près, sa spécification doit comprendre la température et la pression auxquelles la longueur est définie. Le mesurande peut alors être spécifié comme, par exemple, la longueur de la barre à 25,00 °C et 101 325 Pa (avec, en plus, tout autre paramètre de définition jugé nécessaire, tel que la manière de tenir la barre). Cependant, si l'on ne doit déterminer la longueur de la barre qu'au millimètre près, sa spécification ne nécessitera pas la définition d'une température, ou d'une pression, ou de tout autre paramètre.

NOTE : Une définition incomplète du mesurande peut entraîner une composante d'incertitude suffisamment grande pour qu'il soit nécessaire de l'inclure dans l'évaluation de l'incertitude du résultat de mesure.

Erreurs, effets et corrections

Erreur de mesure

Différence entre la valeur mesurée d'une grandeur et une valeur de référence.

Un mesurage présente en général des imperfections qui occasionnent une **erreur** pour le résultat de mesure. On envisage traditionnellement qu'une erreur possède deux composantes, à savoir une composante **aléatoire** et une composante **systématique**.

NOTE : Le concept d'erreur est idéal et les erreurs ne peuvent pas être connues exactement.

Erreur aléatoire

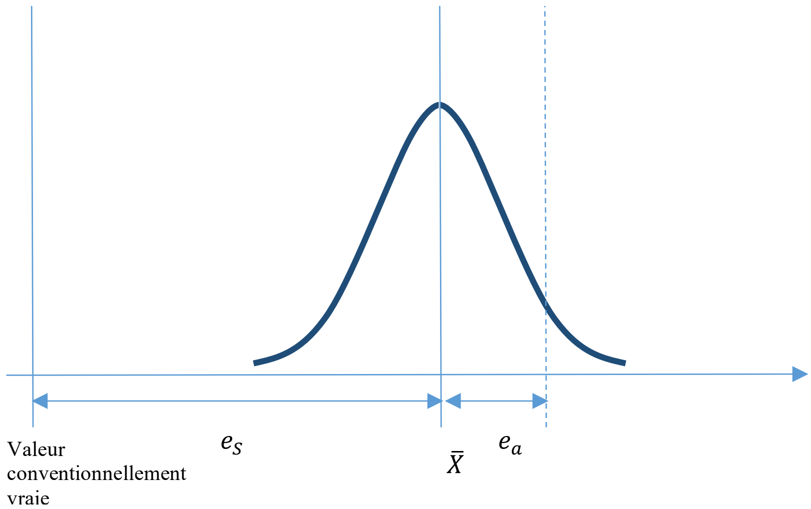
L'erreur aléatoire provient probablement de variations temporelles et spatiales non prévisibles ou stochastiques de grandeurs d'influence. Les effets de telles variations, appelés ci-après *effets aléatoires*, entraînent des variations pour les observations répétées du mesurande. Bien qu'il ne soit pas possible de compenser l'erreur aléatoire d'un résultat de mesure, celle-ci peut généralement être réduite en augmentant le nombre d'observations. Son **espérance mathématique** ou **valeur espérée** est égale à zéro.

NOTE : L'écart-type expérimental de la moyenne arithmétique d'une série d'observations *n'est pas* l'erreur aléatoire de la moyenne, bien qu'on le désigne ainsi dans certaines publications. Mais c'est, en fait, une mesure de l'*incertitude* de la moyenne due aux effets aléatoires. La valeur exacte de l'erreur sur la moyenne provenant de ces effets ne peut pas être connue.

Erreur systématique

L'erreur systématique, comme l'erreur aléatoire, ne peut pas être éliminée mais, elle aussi, peut souvent être réduite. Si une erreur systématique se produit sur un résultat de mesure à partir d'un effet reconnu d'une grandeur d'influence, effet appelé ci-après *effet systématique*, l'effet peut être quantifié et, s'il est significatif par rapport à l'exactitude requise du mesurage, une **correction** ou un **facteur de correction** peut être appliqué pour compenser l'effet. On suppose qu'après correction l'espérance mathématique de l'erreur qui provient d'un effet systématique est égale à zéro.

On suppose que le résultat d'un mesurage a été corrigé pour tous les effets systématiques reconnus comme significatifs et qu'on a fait tous ses efforts pour leur identification.



Notion de mesurage et d'étalonnage

Etalonnage

Opération qui, dans des conditions spécifiées, établit en une première étape une relation entre les **valeurs** et les **incertitudes de mesure** associées qui sont fournies par des étalons et les indications correspondantes avec les incertitudes associées, puis utilise en une seconde étape cette information pour établir une relation permettant d'obtenir un **résultat de mesure** à partir d'une indication.

4.1.3 Erreur de justesse

L'erreur de justesse, est la différence entre la valeur lue et la valeur vraie.

E_j = *Lecture – valeur vraie*

Lecture est la valeur lue sur l'instrument de mesure.
La valeur vraie est la valeur de l'étalon qui a servi à réaliser la mesure.

4.1.4 Correction

Le résultat d'une mesure lors de l'utilisation d'un instrument vérifié est :

$$\boldsymbol{Lecture\_corrigée = Lecture - E_j}$$

$$\boldsymbol{C = -E_j}$$

$$\boldsymbol{Lecture\_corrigée = Lecture + C}$$

5 La méthode GUM

5.1 Sources d'incertitude (LES 5M)

Il existe dans la pratique de nombreuses sources possibles d'incertitude dans un mesurage, comprenant :

a) Définition incomplète du mesurande;
b) Réalisation imparfaite de la définition du mesurande ;
c) Échantillonnage non-représentatif — l'échantillon mesuré peut ne pas représenter le mesurande défini ;
d) Connaissance insuffisante des effets des conditions d'environnement sur le mesurage ou mesurage imparfait des conditions d'environnement ;
e) Biais dû à l'observateur pour la lecture des instruments analogiques ;
f) Résolution finie de l'instrument ou seuil de mobilité ;
g) Valeurs inexactes des étalons et matériaux de référence ;
h) Valeurs inexactes des constantes et autres paramètres obtenus de sources extérieures et utilisés dans l'algorithme de traitement des données ;
i) Approximations et hypothèses introduites dans la méthode et dans la procédure de mesure ;
j) Variations entre les observations répétées du mesurande dans des conditions apparemment identiques.

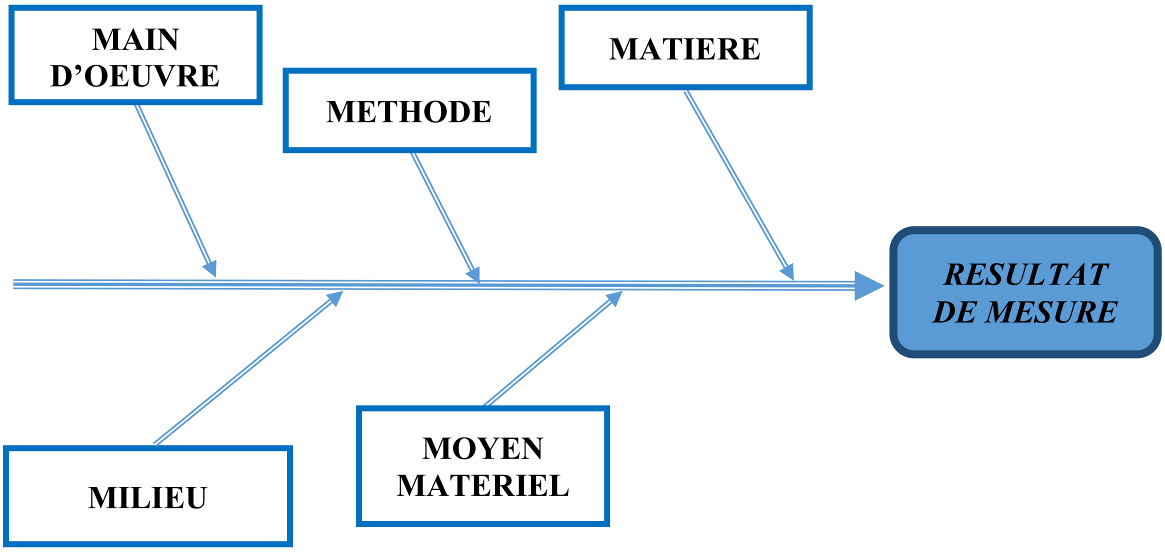
5.1.1 Caractérisation du processus de mesure

La méthode des 5M comprend :

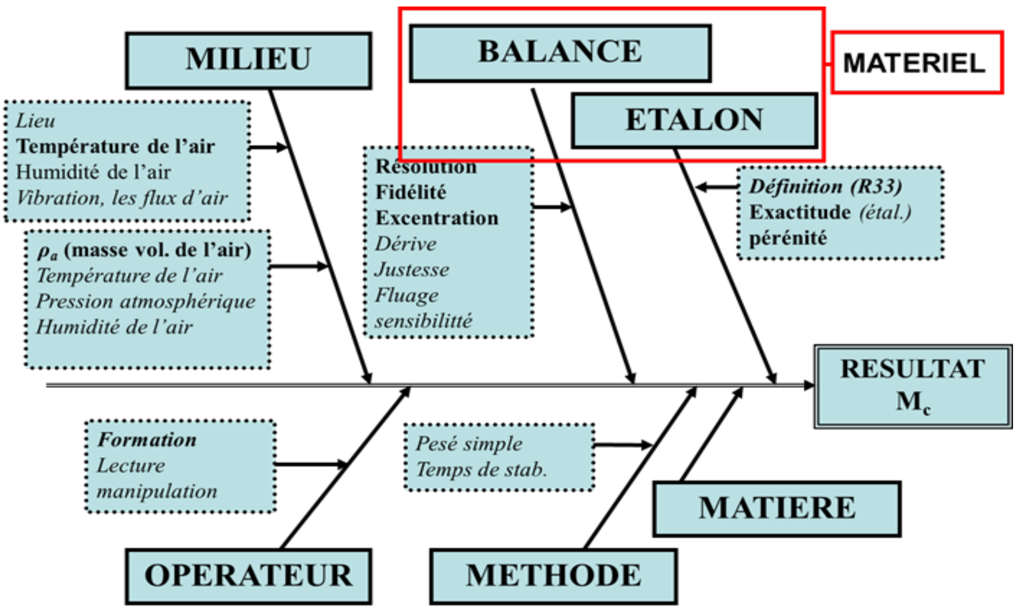
- Le mesurande (Matière)
- La méthode (Mode opératoire)
- Les moyens matériels de mesure

- Les moyens humains (Main d'oeuvre)
- L'environnement de mesure (Milieu)

Identification des causes réelles ou potentielles de variation du résultat de mesure :
Diagramme de cause à effet (ou diagramme d'Ishikawa ou diagramme en arête de poisson)



Cas pratique de l'étalonnage d'une balance



Caractériser le processus de mesure :

- Décrire le mode opératoire retenu en fonction des ressources choisies,
- Établir un modèle de la mesure ;
- identifier les causes d'erreur;
- Calculer la valeur de la composante d'erreur associée à chaque cause,
- Prendre la décision sur l'application ou non de la correction correspondante (si on doit corriger, qui corrige ? comment ?)

5.2 Evaluation de Type A et évaluation de Type B

Les incertitudes sont classées en deux catégories fondées sur leur méthode d'évaluation, « A » et « B ». Ces catégories s'appliquent à l'*incertitude* et ne constituent pas des substituts aux mots « aléatoire » et « systématique ». L'incertitude d'une correction pour un effet systématique connu peut être obtenue dans certains cas par une évaluation de Type A et dans d'autres cas par une évaluation de Type B ; il peut en être de même pour l'incertitude qui caractérise un effet aléatoire.

5.2.1 Incertitude-type de Type A

La variance estimée u^2 qui caractérise une composante de l'incertitude obtenue par une évaluation de Type A est calculée à partir de séries d'observations répétées et est la variance habituelle estimée statistiquement. L'**écart-type** estimé u, racine carrée de u^2, est donc $u = s$ et, par commodité, est parfois appelé *incertitude-type de Type A*.

5.2.2 Incertitude-type de Type B

Pour une composante de l'incertitude obtenue par une évaluation de Type B, la variance estimée u^2 est évaluée par utilisation des connaissances disponibles et l'écart-type estimé u est parfois appelé *incertitude-type de Type B*.

On obtient donc une incertitude-type de Type A à partir d'une **fonction de densité de probabilité** (ou simplement **densité de probabilité**) déduite d'une **distribution d'effectif** (ou distribution de fréquence) observée alors qu'on obtient une incertitude-type de Type B à partir d'une densité de probabilité supposée, fondée sur le degré de croyance en ce qu'un événement se produise [souvent appelé **probabilité** subjective]. Les deux approches utilisent des interprétations classiques de la probabilité.

NOTE : Une évaluation de Type B d'une composante de l'incertitude est habituellement fondée sur un ensemble d'informations relativement fiables.

5.2.3 Incertitude-type composée

Lorsque le résultat d'un mesurage est obtenu à partir des valeurs de plusieurs autres grandeurs, l'incertitude-type de ce résultat est appelée *incertitude-type composée* et notée u_c. C'est l'incertitude estimée associée au résultat et elle est égale à la racine carrée de la variance composée obtenue à partir de toutes les composantes de variances et **covariances**, de quelque manière qu'elles soient évaluées, en utilisant la *loi de propagation de l'incertitude*.

5.2.4 Facteur d'élargissement k

Pour satisfaire les besoins de certaines applications industrielles et commerciales ainsi que les exigences dans les domaines de la santé et de la sécurité, une *incertitude élargie U* s'obtient par la multiplication de l'incertitude-type composée *u*c par un *facteur d'élargissement k*. L'objectif poursuivi avec cette incertitude élargie *U* est de fournir, autour du résultat d'un mesurage, un intervalle dont on puisse s'attendre à ce qu'il comprenne une fraction élevée de la distribution des valeurs qui pourraient être attribuées raisonnablement au mesurande. Le choix du facteur *k*, qui est habituellement compris entre 2 et 3, est fondé sur la probabilité ou le niveau de confiance exigé pour l'intervalle.

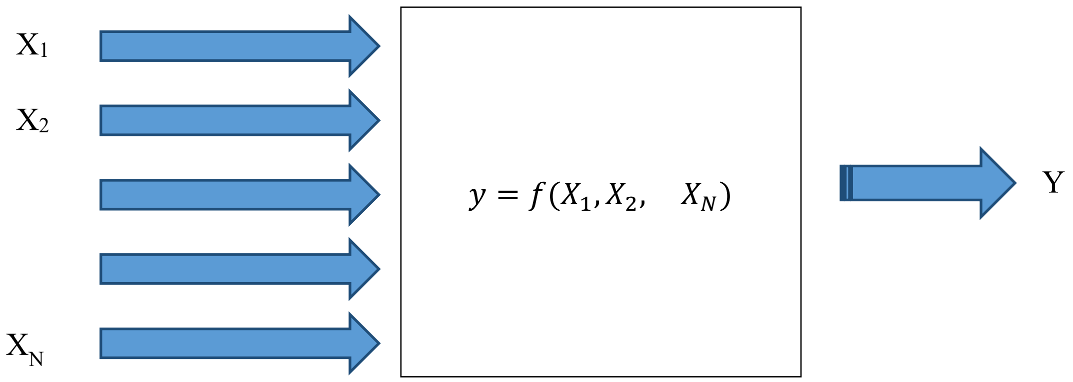
NOTE : Le facteur d'élargissement *k* doit toujours être donné pour que l'incertitude-type de la grandeur mesurée puisse être retrouvée et utilisée dans le calcul de l'incertitude-type composée d'autres résultats de mesure qui pourraient dépendre de cette grandeur.

5.3 Considérations pratiques

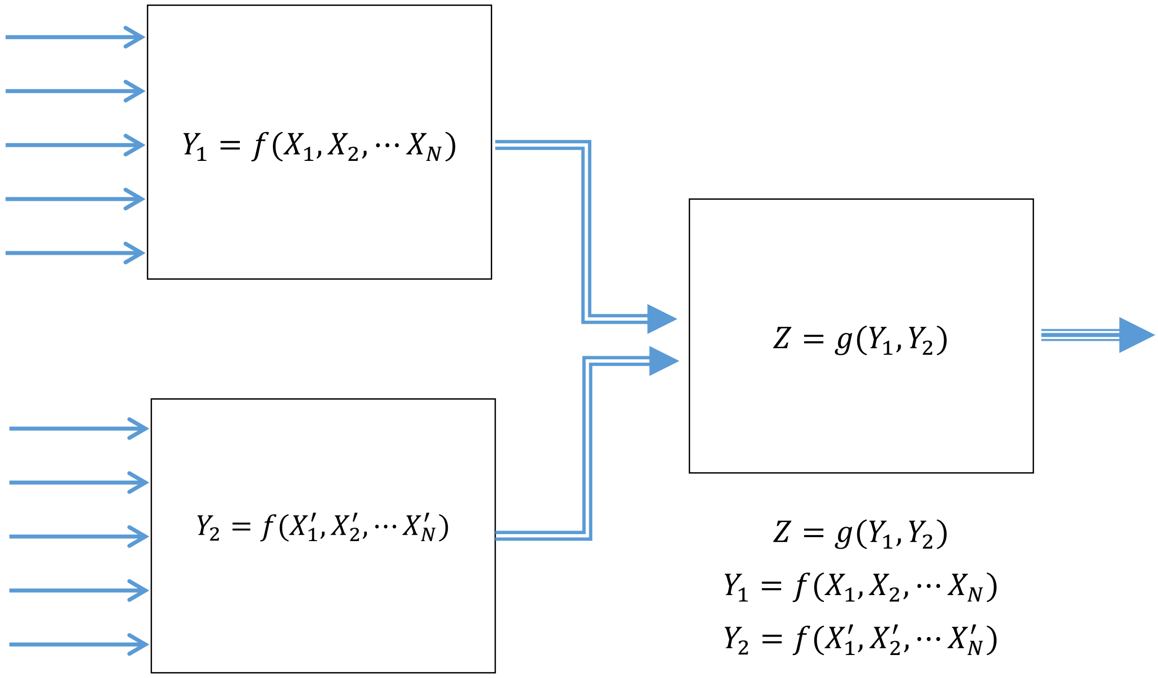
5.3.1 Modèle mathématique du mesurage

Dans de nombreux cas, un mesurande Y n'est pas mesuré directement mais il est déterminé à partir de N autres grandeurs X_1, X_2, ..., X_N à travers une relation fonctionnelle f:

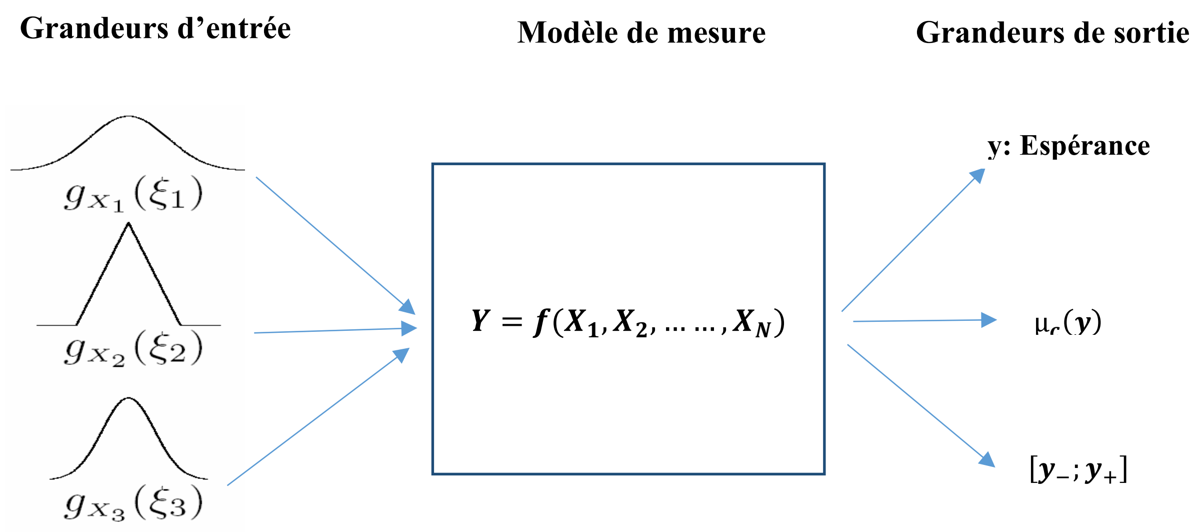
$$\boldsymbol{Y = f(X_1, X_2, \dots\dots, X_N)}$$



<u>Modèle à un seul processus</u>



<u>Modèle avec des processus intermédiaires</u>



<u>Modèle mathématique du processus de mesure</u>

L'incertitude d'un résultat de mesure est habituellement évaluée par utilisation d'un modèle mathématique du mesurage et de la loi de propagation de l'incertitude.

Dans une série d'observations, la *k*ième valeur observée de *Xi* est notée *Xi, k*,; ainsi, si une résistance est notée *R*, la *k*ième valeur observée de la résistance est notée *Rk*.

L'estimation de *Xi* (à proprement parler, de son espérance mathématique) est notée *xi*.

Si l'on applique une différence de potentiel *V* aux bornes d'une résistance dont la valeur dépend de la température, de la résistance R_0 à la température définie t_0 et du coefficient linéaire de température α, la puissance P (le mesurande) dissipée par la résistance à la température t est fonction de V, R_0, α, et t selon la formule suivante :

$$P = \frac{V^2}{R_0}[1 + \alpha(t - t_0)]$$

Modèle mathématique	Formule mathématique
$P = f(V, R_0, \alpha, t)$	$P = \frac{V^2}{R_0}[1 + \alpha(t - t_0)]$
$P = f(n, R, T, V)$	$P = \frac{nRT}{V}$
$L = f(L_0, \alpha, T)$	$L = L_0 + \alpha L_0(T - T_0)$

Les *grandeurs d'entrée* X_1, X_2, ..., X_N dont dépend la *grandeur de sortie Y* peuvent elles-mêmes être envisagées comme mesurandes et peuvent elles-mêmes dépendre d'autres grandeurs, y compris les corrections et facteurs de correction pour les effets systématiques, aboutissant de ce fait à une relation.

Une estimation du mesurande *Y*, notée *y*, est obtenue à partir de l'Équation en utilisant les estimations d'entrée x_1, x_2, ..., x_N pour les valeurs des *N* grandeurs X_1, X_2, ..., X_N. Ainsi, l'*estimation de sortie y*, qui est le résultat du mesurage, est donnée par :

$$y = f(x_1; x_2; \dots\dots; x_N)$$

L'écart-type estimé associé à l'estimation de sortie ou au résultat de mesure *y*, appelé *incertitude-type composée* et noté $u_c(y)$, est déterminé à partir de l'écart-type estimé associé à chaque estimation d'entrée x_i, appelée *incertitude-type* et notée $u(x_i)$

Chaque estimation d'entrée x_i ainsi que son incertitude-type associée *u*(*xi*) sont obtenues à partir d'une loi des valeurs possibles de la grandeur d'entrée X_i. Cette loi de probabilité peut être fondée sur une distribution de fréquence, c'est-à-dire sur une série d'observations *Xi*,*k* des X_i, ou ce peut être une loi *a priori*.

Les évaluations de Type A de composantes de l'incertitude-type sont fondées sur des distributions de fréquence alors que les évaluations de Type B sont fondées sur des lois *a priori*.

5.3.2 Considération des incertitudes de mesure

Dans certains cas, il n'est pas nécessaire d'inclure l'incertitude d'une correction pour un effet systématique dans l'évaluation de l'incertitude d'un résultat de mesure. Bien que l'incertitude ait été évaluée, elle peut être ignorée si sa contribution à l'incertitude-type composée du résultat de mesure est insignifiante.

Si la valeur de la correction elle-même est insignifiante par rapport à l'incertitude-type composée, elle peut, elle aussi, être ignorée.

5.4 Évaluation de l'incertitude-type

5.4.1 Termes et concepts statistiques fondamentaux

Probabilité

Nombre réel dans l'intervalle de 0 à 1, associé à un événement aléatoire.

$$\boldsymbol{F(x) = Pr(X \leq x)}$$

Fonction de densité de probabilité (pour une variable aléatoire continue)

Dérivée (lorsqu'elle existe) de la fonction de répartition :

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{dF(x)}{dx}}$$

$\boldsymbol{f(x)dx}$ est appelée probabilité élémentaire

Corrélation

Liaison entre deux ou plusieurs variables aléatoires à l'intérieur d'une loi.

5.4.2 Termes et concepts élaborés

Espérance mathématique

L'espérance mathématique d'une fonction *g*(*z*) de la variable aléatoire *z* qui a la densité de probabilité *p*(*z*) est définie par

$$E[g(z)] = \int g(z)\, p(x) dz$$

Avec $\int p(z)dz = 1$ en raison de la définition de *p*(*z*). L'espérance mathématique de la variable aléatoire *z*, notée μ_z et qui est aussi appelée *valeur espérée* ou moyenne de z est donnée par :

$$\mu_z \equiv E(z) = \int zp(z)dz$$

Elle est estimée par les méthodes statistiques par moyenne arithmétique *z*.
Moyenne arithmétique de *n* observations indépendantes *zi* de la variable aléatoire *z*, qui a pour densité de probabilité *p*(*z*):

$$\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i$$

Variance

La variance d'une variable aléatoire est l'espérance mathématique de son écart quadratique par rapport à son espérance mathématique. Ainsi, la variance d'une variable aléatoire *z* de densité de probabilité *p*(*z*) est :

$$\sigma^2(z) = \int (z - \mu_z)^2 p(z)dz$$

Où μ_z est l'espérance mathématique de z. La variance $\sigma^2(z)$ peut être estimée par

$$\delta^2(z_i) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(z_j - \bar{z}\right)^2$$

$$\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i$$

et où les *zi* sont *n* observations indépendantes de *z*.

Le facteur n-1 dans l'expression de $\delta^2(z_i)$ provient de la corrélation entre z_i et z et reflète le fait qu'il y a seulement n-1 éléments indépendants dans l'ensemble $(z_i - \bar{z})$.

Si l'espérance mathématique μ_z de z est connue, la variance peut être estimée par :

$$\delta^2(z_i) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \mu_z)^2$$

La variance de la moyenne arithmétique des observations est, bien plus que la variance des observations individuelles, la mesure correcte de l'incertitude d'un résultat de mesure.

On doit distinguer soigneusement la variance d'une variable z de la variance de la moyenne $\bar{z}$. La variance de la moyenne arithmétique d'une série de n observations indépendantes z_i de z est donnée par $\sigma^2(\bar{z}) = \sigma^2(z_i)/n$ et elle est estimée par la variance expérimentale de la moyenne :

$$\delta^2(\bar{z}) = \frac{\delta^2(z_i)}{n} = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2$$

Écart-type

L'écart-type est la racine carrée de la variance. Une incertitude-type de Type A est obtenue en prenant la racine carrée de la variance évaluée statistiquement.

Il est souvent plus commode lorsqu'on évalue une incertitude-type de Type B d'évaluer d'abord un écart-type équivalent obtenu de manière non-statistique, puis obtenir la variance équivalente en élevant l'écart-type au carré.

Covariance

La covariance de deux variables aléatoires est une mesure de leur dépendance mutuelle. La covariance de deux variables aléatoires *y* et *z* est définie par :

$$cov(y,z) = cov(z,y) = E\big[[y - E(y)][z - E(z)]\big]$$

$$cov(y,z) = cov(z,y) = \iint \left(y - \mu_y\right)(z - \mu_z)p(y,z)dydz$$

$$= \iint (y - \mu_y)\,(z - \mu_z)p(y,z)dydz$$

Coefficient de corrélation

Le coefficient de corrélation est une mesure de la dépendance mutuelle relative de deux variables, égal au rapport de leurs covariances à la racine carrée du produit de leurs variances :

$$\rho(y,z) = \rho(z,y)$$

Indépendance

Deux variables aléatoires sont statistiquement indépendantes si leur loi de probabilité jointe est le produit de leurs lois de probabilité individuelles.

NOTE : Si deux variables aléatoires sont indépendantes, leur covariance et leur coefficient de corrélation sont nuls, mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai.

5.4.3 Autres formules

5.4.4 Évaluation de Type A de l'incertitude-type

La meilleure estimation de l'espérance mathématique μ_q d'une grandeur *q* qui varie de façon **aléatoire** et pour laquelle on a obtenu *n* observations indépendantes q_k dans les mêmes conditions de mesure, est la **moyenne arithmétique** des *n* observations:

$$\bar{q} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k$$

La variance expérimentale des observations, qui estime la variance σ^2 de la loi de probabilité de *q*, est donnée par :

$$\delta^2(q_k) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(q_j - \bar{q}\right)^2$$

Cette estimation de la variance et sa racine carrée $\delta(q_k)$, appelée **écart-type expérimental**, caractérisent la dispersion des valeurs observées autour de leur moyenne $\bar{q}$.

La meilleure estimation de $\sigma^2(\bar{q}) = \sigma^2/n$, variance de la moyenne, est donnée par :

$$\delta^2(\bar{q}) = \frac{\delta^2(q_k)}{n}$$

La variance expérimentale de la moyenne $\delta^2(\bar{q})$ et l'**écart-type expérimental de la moyenne $\boldsymbol{\delta(\bar{q})}$**, égal à la racine carrée de $\delta^2(\bar{q})$, quantifient la manière dont *q* estime au mieux l'espérance mathématique $\mu_q$de *q* et l'une comme l'autre peuvent être utilisés comme mesure de l'incertitude de *q*.

Alors, pour une grandeur d'entrée X_i déterminée à partir de *n* observations répétées indépendantes $X_{i,k}$, l'incertitude-type $u(x_i)$ de son estimation $x_i = \bar{X}_i$ est $u(x_i) = \delta(\bar{X}_i)$, avec $\delta^2(\bar{X}_i)$ calculé selon l'Équation ci-dessus.

Ainsi, $u^2(x_i) = \delta^2(\bar{X}_i)$ et $u(x_i) = \delta(\bar{X}_i)$ sont appelés respectivement *variance de Type A* et *incertitude-type de Type A*.

NOTE 1 : Le nombre d'observations *n* doit être suffisamment grand pour garantir que *q* fournisse une estimation fiable de l'espérance mathématique

Le nombre de degrés de liberté v_i de $u(x_i)$, égal à **n-1** dans le cas simple où $x_i = \bar{X}_\iota$ $u(x_i) = s(\bar{X}_\iota)$ sont calculés à partir de *n* observations indépendantes et, doit toujours être donné lorsque les évaluations de Type A des composantes d'incertitude sont fournies.

5.4.5 Évaluation de Type B de l'incertitude-type

Pour une estimation x_i d'une grandeur d'entrée X_i qui n'a pas été obtenue à partir **d'observations répétées**, la variance estimée associée $u^2(x_i)$ ou l'incertitude-type $u(x_i)$ est évaluée par **un jugement scientifique** fondé sur toutes les **informations disponibles** au sujet de la **variabilité possible** de X_i. L'ensemble d'informations accumulées peut comprendre :

- des résultats de mesures antérieures ;
- l'expérience ou la connaissance générale du comportement et des propriétés des matériaux et instruments utilisés ;
- les spécifications du fabricant ;
- les données fournies par des certificats d'étalonnage ou autres certificats ;
- l'incertitude assignée à des valeurs de référence provenant d'ouvrages et manuels.

Par commodité, $u^2(x_i)$ et $u(x_i)$ évalués de cette façon sont parfois appelés respectivement ***variance de Type B*** et ***incertitude-type de Type B***.

Une évaluation de Type B de l'incertitude-type fait appel à l'expérience et les connaissances générales, et c'est une compétence qui s'apprend par la pratique.

Si l'on obtient l'estimation x_i à partir d'une **spécification de fabricant, d'un certificat d'étalonnage, d'une publication** ou d'une autre source, et que son incertitude indiquée est donnée comme étant **un multiple déterminé** d'un écart-type, l'incertitude-type $u(x_i)$ est simplement égale au **quotient de la valeur indiquée par le facteur multiplicatif** et la variance estimée $u^2(x_i)$ est égale au carré de ce quotient.

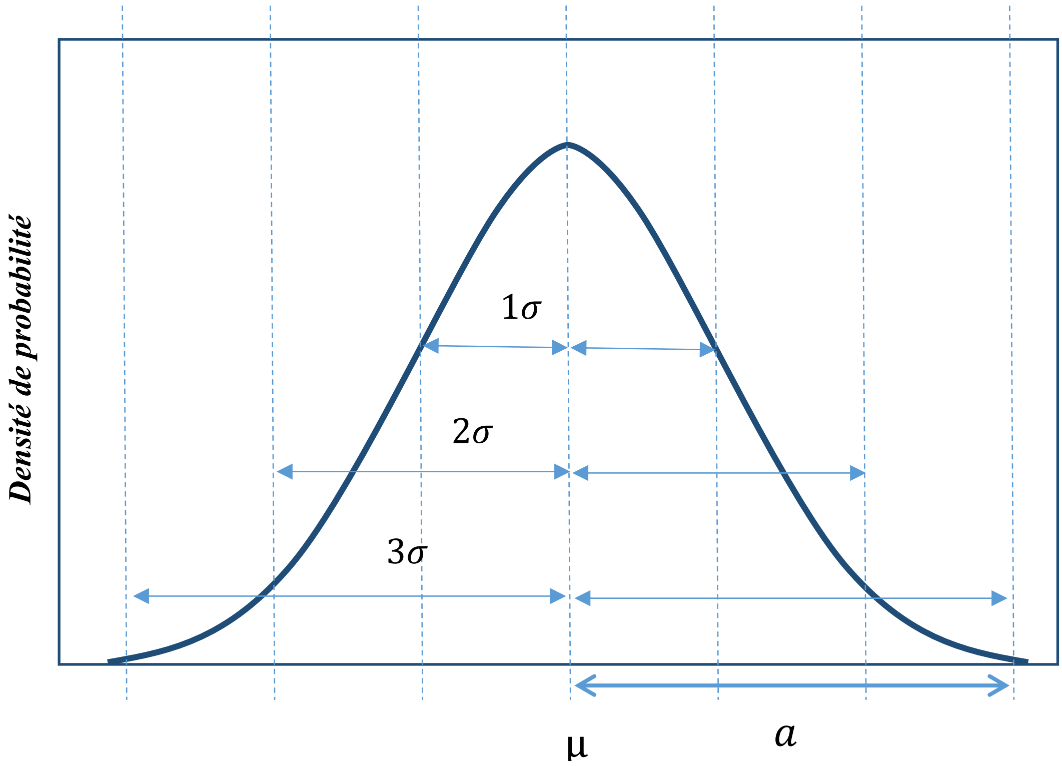
On peut supposer qu'une **loi normale** a été utilisée.

5.4.6 Les fonctions de distribution

5.4.6.1 La loi normale

La loi normale est une loi de probabilité d'une variable aléatoire continue X, dont la densité de probabilité est

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

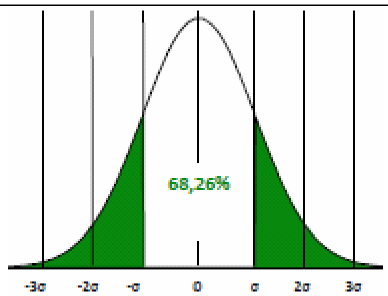
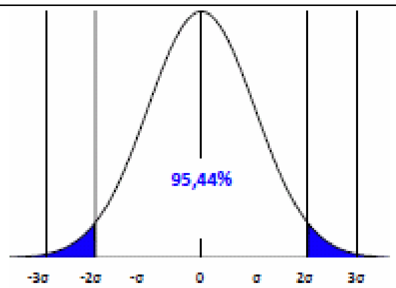
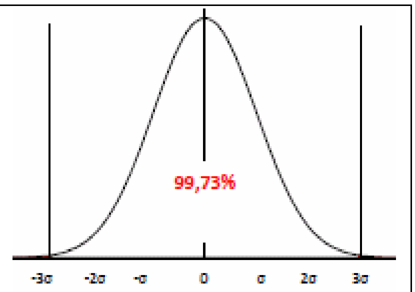


$\mu \pm 1\sigma$ correspond à 68,27 % des observations

$\mu \pm 2\sigma$ correspond à 95,45 % des observations

$\mu \pm 3\sigma$ correspond à 99,73 % des observations

$$a = 3\sigma$$

		
$(-\sigma \leq X - m \leq \sigma)$ Probabilité ≈ 0,68	$(-2\sigma \leq X - m \leq 2\sigma)$ Probabilité ≈ 0,95	$(-3\sigma \leq X - m \leq 3\sigma)$ Probabilité ≈ 0,997

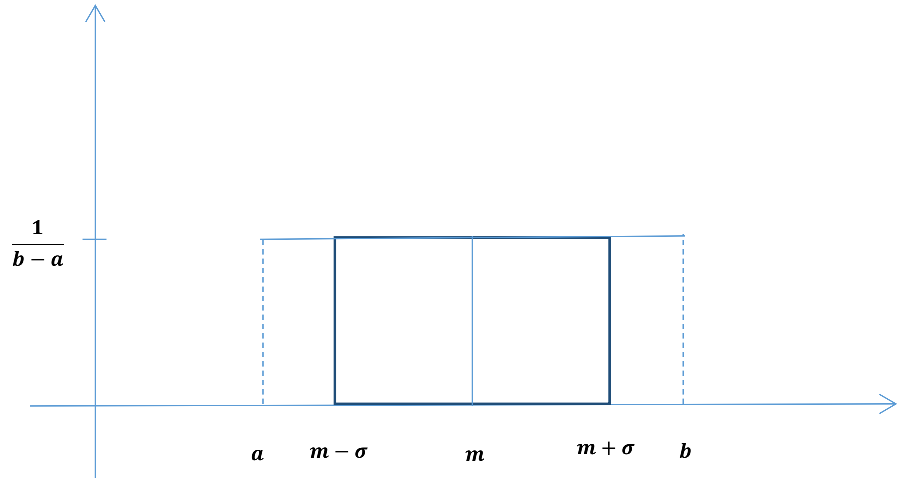
Pour une **loi normale** d'espérance mathématique μ et d'écart-type σ, **l'intervalle μ ± 3σ** recouvre approximativement **99,73** pourcent des valeurs possibles de la loi. Si les limites supérieure et inférieure a+ et a− définissent alors des limites à 99,73 pourcent plutôt qu'à 100 pourcent, alors

$u^2(x_i) = a^2/9$ et $u(x_i) = a/3$

5.4.6.2 Lois rectangulaires (ou lois uniformes)

Une variable X suit une loi uniforme sur un intervalle [a , b] si sa fonction de densité f est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \; pour \; a \leq x \leq b \;\; et \; f(x) = 0 \;\; si \; non$$



On montre aisément que :
La variance :

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

L'écart type : $\sigma = \frac{(b-a)}{2\sqrt{3}}$

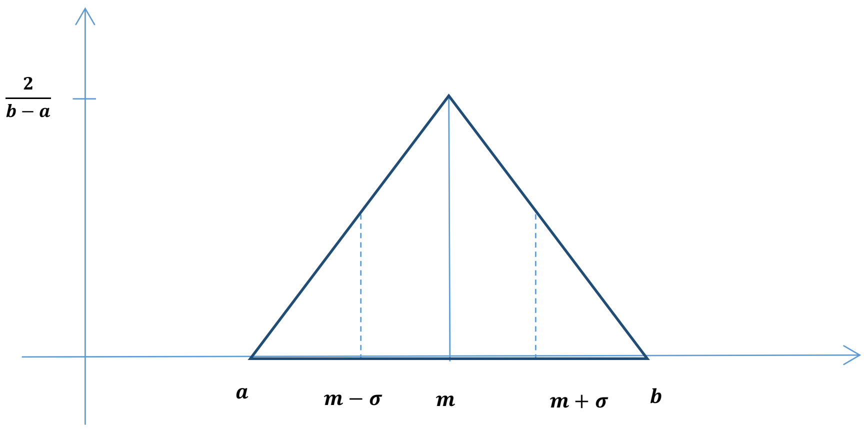
5.4.6.3 Lois triangulaires

Une variable X suit une loi triangulaire sur un intervalle [a , b] si sa fonction de densité f est définie par :

$$f(x) = \frac{4(x-a)}{(b-a)^2} \; pour \; a \leq x \leq \frac{b+a}{2}$$

$$f(x) = \frac{4(b-x)}{(b-a)^2} \; pour \; \frac{b+a}{2} \leq x \leq b$$

$$f(x) = 0 \; Si \; non$$

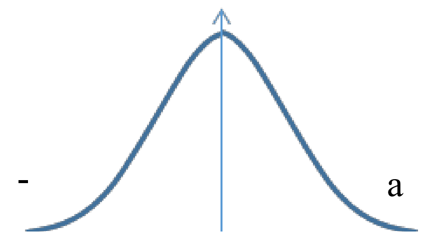
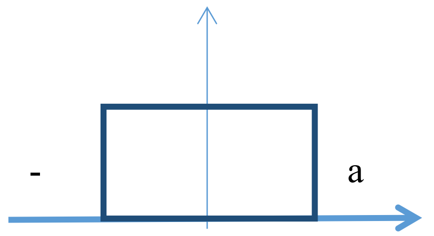
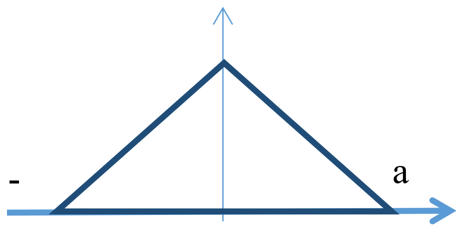
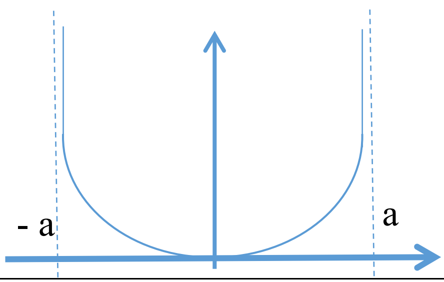


On montre que l'espérance mathématique ou la moyenne de X $= \frac{b+a}{2}$

Et la variance $V(X) = \frac{(b-a)^2}{24}$

L'écart type $\sigma = \frac{(b-a)}{2\sqrt{6}}$

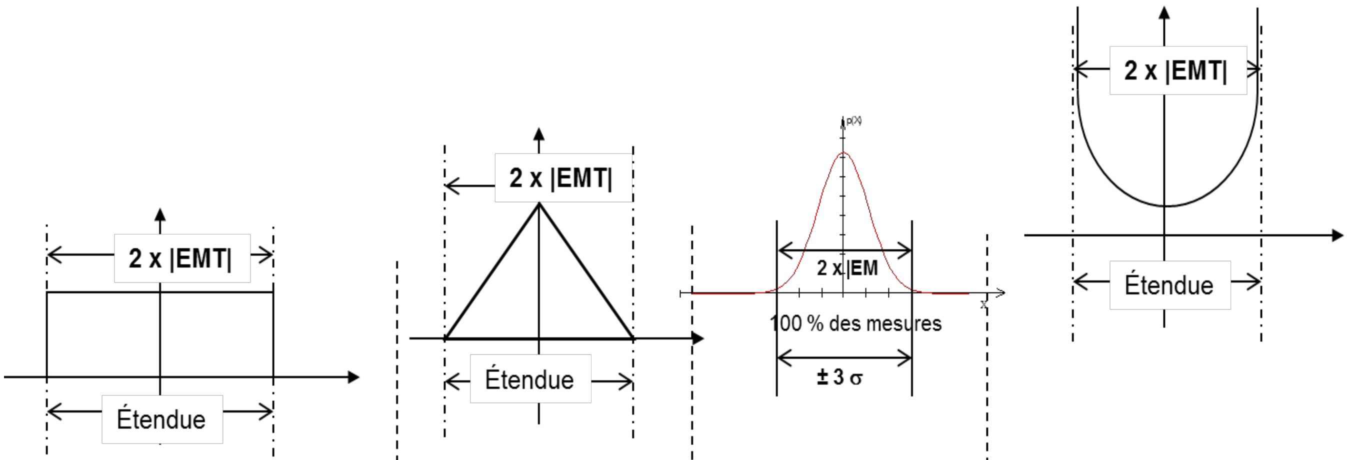
QUELQUES FONCTIONS DE DISTRIBUTION DE LA METHODE DE TYPE B

Loi	Distribution	Variance	Ecart type
NORMALE		$\frac{d^2}{36} = \frac{a^2}{9}$	$\frac{d}{6} = \frac{a}{3}$
RECTANGULAIRE OU UNIFORME		$\frac{d^2}{12} = \frac{a^2}{3}$	$\frac{d}{\sqrt{12}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$
TRIANGULAIRE		$\frac{d^2}{24} = \frac{a^2}{6}$	$\frac{d}{\sqrt{24}} = \frac{a}{\sqrt{6}}$
ARCSINUS		$\frac{d^2}{8} = \frac{a^2}{2}$	$\frac{d}{\sqrt{8}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Les lois de probabilité les plus utilisés dans le cadre de l'évaluation des composantes d'incertitudes de type B sont :

- **La loi Normale,**
- **La loi Uniforme ou loi rectangulaire**
- **La loi Triangulaire**
- **La loi Arcsinus**

SYNTHESE DES METHODES DE TYPE B
(EMT et Etendue)



Rectangulaire	Triangulaire	Normale	Arcsin
$u_B = \frac{étendue}{2\sqrt{3}}$	$u_B = \frac{étendue}{2\sqrt{6}}$	$u_B = \frac{étendue}{6}$	$u_B = \frac{étendue}{2\cdot\sqrt{2}}$
$u_B = \frac{EMT}{\sqrt{3}}$	$u_B = \frac{EMT}{\sqrt{6}}$	$u_B = \frac{EMT}{3}$	$u_B = \frac{EMT}{\sqrt{2}}$

QUELQUES CAS CLASSIQUES DE LA METHODE DE TYPE B

N°	Cas particulier	Incertitude type
1	On utilise un instrument de mesure possédant un certificat d'étalonnage donnant une incertitude U donnée comme un multiple de l'incertitude type : $$U = k.u$$ k est généralement connu sous l'appellation de « facteur d'élargissement », U étant « l'incertitude élargie », l'opérateur en déduira facilement : $$u = \frac{U}{k}$$ à condition que le facteur d'élargissement soit donné (par exemple, pour les certificats d'étalonnage émis par le Cofrac, le facteur d'élargissement est conventionnellement fixé à K=2).	$u = \frac{U}{k}$
2	On utilise un instrument de mesure possédant un constat de vérification attestant de la conformité à des spécifications (constructeur, réglementaire, normative ou contractuelles) définissant un intervalle $[x - t\ ,\ x + t]$ de largeur égale à deux fois une erreur maximale tolérée t répartie symétriquement autour de la lecture x L'incertitude type correspondante est obtenue en ne privilégiant aucune valeur appartenant à cet intervalle, donc en associant une loi de distribution rectangulaire, auquel cas $$u = \frac{t}{\sqrt{3}}$$	$u = \frac{t}{\sqrt{3}}$
3	L'incertitude due à l'erreur de non-linéarité ou d'hystérésis se traite comme ci-dessus dans la mesure où on ne connaît pas la valeur de l'erreur (donc la correction à apporter) au point de fonctionnement. Le constructeur définissant une « erreur maximale de non-linéarité » nl ou une « erreur maximale d'hystérésis » h, les composantes d'incertitude correspondantes seront respectivement données par : $$u = \frac{nl}{\sqrt{12}}$$ $$u = \frac{h}{\sqrt{12}}$$	L'incertitude de non-linéarité $u = \frac{nl}{\sqrt{12}}$ L'incertitude d'hystérésis $u = \frac{h}{\sqrt{12}}$
4	Pour un système possédant une résolution finie (par exemple instrument numérique avec un pas de quantification q), on associe une loi de distribution rectangulaire de sorte que l'incertitude type résultant de cette résolution finie s'écrit : $$u = \frac{q}{\sqrt{12}}$$	$u = \frac{q}{\sqrt{12}}$
5	La mesure de la température dans une salle avec une variation de température de ΔT : On associe une loi de distribution en U (Arcsinus)	$u = \frac{\Delta T}{2\sqrt{2}}$

	$u = \frac{\Delta T}{2\sqrt{2}}$	
6	Dans le domaine de la fabrication de pointe on peut choisir une loi triangulaire	$u = \frac{a}{\sqrt{6}}$
7	Calculs à précision limitée L'arrondissement ou la troncature des nombres qui se produit dans les réductions automatiques de données par les ordinateurs peut aussi être une source d'incertitude. Considérons par exemple un ordinateur avec une longueur de mots de 16 octets. Si, au cours du calcul, un nombre correspondant à cette longueur de mots est soustrait d'un autre nombre dont il diffère seulement par le 16^{e} octet, il reste seulement un octet significatif. De tels cas peuvent se produire dans l'évaluation d'algorithmes « mal conditionnés » et ils peuvent être difficiles à prévoir ; si la variation est δx $u = \frac{\delta x}{\sqrt{12}}$	$u = \frac{\delta x}{\sqrt{12}}$

Exemples pratiques d'application des méthodes de type B.

<u>Distribution de probabilité rectangulaire</u>

L'exactitude de mesure d'un voltmètre est de ± 0,05%. La limite de demi-intervalle est de 0,05% et l'incertitude type est donnée par :

$$u(V) = \frac{0{,}05\ \%}{\sqrt{3}}$$

La résolution de l'affichage numérique de la tension est de 1 mV. Ainsi, l'intervalle est de 1mV et la limite de demi-intervalle est la moitié de 1 mV. L'incertitude type est alors donnée par :

$$u(V) = \frac{1\text{mV}}{2\sqrt{3}}$$

L'effet d'hystérésis d'un instrument est de 0,1%, soit l'intervalle équivalent à la différence entre le maximum et le minimum pour la même entrée. La limite de la demi-intervalle est égale à la moitié de 0,1%. L'incertitude type est donnée par :

$$u(R) = \frac{0{,}1\%}{2\sqrt{3}}$$

La dérive maximale de la valeur d'un étalon de capacité entre intervalles d'étalonnage est de 0,001 pF. L'historique de l'étalon de capacité des dernières années montre que la valeur de la capacité change de 0,001 pF au maximum. L'incertitude type est alors donnée par :

$$u(dérive) = \frac{0{,}001\ \text{pF}}{\sqrt{3}}$$

Distribution de probabilité en forme de U ou Arcsinus

La puissance de sortie d'un générateur de signal est mesurée par un wattmètre. La magnitude des coefficients de réflexion du générateur de signal et du wattmètre est respectivement de 0,2 et 0,091. L'incertitude type due à la disparité est donnée par :

$$u(m) = \frac{2\text{x}0.2\text{x}0.091}{\sqrt{2}}$$

Distribution de probabilité normale ou gaussienne

Un rapport d'étalonnage indique que l'incertitude est de ± 0,1 dB avec un facteur de couverture de 2,63. L'incertitude type est donnée par :

$$u(x) = \frac{0.1\ \text{dB}}{2{,}63}$$

Un certificat d'étalonnage indique que la masse m_S d'un étalon de masse en acier inoxydable de valeur nominale égale à un kilogramme est de **1 000,000 325 g** et que «l'incertitude sur cette valeur est égale à **240 µg** au niveau de **3 écarts-types»**.

L'incertitude-type de l'étalon de masse est alors simplement :

$u(m_S) = \frac{240\ \mu\text{g}}{3}$= 80 µg
Cela correspond à une incertitude-type relative $u(m_S)/m_S$ égale à 80 10^{-9}.
La variance estimée est $u^2(m_S)$ = (80 µg)^2= 6,4 10^{-9}g^2.

Le GUM recommande que le facteur d'élargissement utilisé soit toujours donné dans les documents cités ci-dessus.

Un certificat d'étalonnage indique que la valeur R_S d'une résistance étalon de valeur nominale égale à dix ohms est de 10,000 742 Ω ± 129 µΩ à 23 °C et que « l'incertitude indiquée de 129 µΩ définit un intervalle au niveau de confiance de 99 pourcent ».

L'incertitude-type sur la valeur de la résistance peut être prise égale à :

$u(R_S)$ = (129 µΩ)/2,58 = 50 µΩ

qui correspond à une incertitude-type relative $u(R_S)/R_S$ de 5,0 10^{-6} . La variance estimée est $u^2(m_S)$ = (50 µΩ)^2 = 2,5 10^{-9}Ω^2.

En résumé : La distribution rectangulaire est un modèle par défaut raisonnable en l'absence de toute autre information. Mais si on sait que la valeur de la quantité en question est proche du centre des limites, une distribution triangulaire ou normale peut être un meilleur modèle.

5.5 Détermination de l'incertitude-type composée

5.5.1 Lorsque les grandeurs d'entrée sont non-corrélées (grandeurs d'entrée sont indépendantes)

L'incertitude-type de *y*, où *y* est l'estimation du mesurande *Y*, donc le résultat du mesurage, est obtenue par une composition appropriée des incertitudes-types des estimations d'entrée $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_N$

Cette *incertitude-type composée* de l'estimation *y* est notée $u_C(y)$

5.5.1.1 Définition du coefficient de sensibilité

Pour une **fonction linéaire** f dépendant d'une seule variable donnée par $Y = f(X)$, le coefficient de sensibilité est défini par

$$C_i = \frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

5.5.1.2 Formule de Taylor

La formule de Taylor généralisée incluant les fonctions non-linéaires est la suivante :

$$f(X) = f(X_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{X_0} \cdot \delta X + \frac{1}{2} \cdot \left.\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\right|_{X_0} + \cdots$$

Pour des fonctions linéaires, l'incertitude-type composée $u_C(y)$ est la racine carrée de la variance composée $u_C^2(y)$ qui est donnée par la **loi de propagation des incertitudes** :

$$u_C^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)$$

f est définit par l'équation : $\boldsymbol{Y = f(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_N)}$**.**
$u(x_i)$ sont des incertitudes-types évaluées par des **évaluations de Type A ou de Type B.**

Une autre expression de $u_C^2(y)$ est :

$$u_C^2(y) = \sum_{i=1}^{N} [c_i u(x_i)]^2 \equiv \sum_{i=1}^{N} u_i^2(y)$$

Le coefficient de sensibilité est :

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$u_i(y) \equiv |c_i| u(x_i)$$

L'incertitude-type composée $u_C(y)$ est un **écart-type estimé** et caractérise la dispersion des valeurs qui pourraient être raisonnablement attribuées au mesurande *Y.*

Lorsque la **non-linéarité de *f* devient significative**, il faut inclure des termes d'ordre plus élevé dans le développement en série de Taylor :

$$u_C^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2}\right] u^2(x_i) u^2(x_j)$$

Si *Y* est de la forme $Y = cX_1^{p1}X_2^{p2}\cdots X_N^{pN}$ et si les exposants *pi* sont des nombres connus, positifs ou négatifs, la variance composée, Équation pour les données d'entrée non corrélées peut être exprimée sous la forme :

$$\left[\frac{u_c(y)}{y}\right]^2 = \sum_{i=1}^{N}\left[p_i\frac{u(x_i)}{x_i}\right]^2$$

5.6 Tableau de budget des incertitudes

Modèle mathématique			$y = f(x_1; x_2; \ldots\ldots x_N)$
Incertitude type de mesure	$u(x_i)$	Incertitude type associée à la valeur d'entrée xi	
	c_i	Coefficient de sensibilité	$c_i \cong \frac{\partial f}{\partial x_i}$
	$u_i(y)$	Contribution en termes d'incertitude de la variable x_i au résultat de la mesure	$u_i(y)=\lvert c_i\rvert \cdot u(x_i)$
L'incertitude type combinée du résultat de mesure	$u(y)$	L'incertitude type combinée associée au résultat de mesure	$u(y) = \sqrt{\sum_1^N u_i^2(y)}$
L'incertitude élargie du résultat de mesure	$U(y)$	L'incertitude élargie	$U(y) = k \cdot u(y)$
	k	Facteur d'élargissement	k = 2

<u>**Présentation n°1 du budget d'incertitude**</u>

Grandeur d'entrée X_i	Estimation x_i	Incertitude-type $u(x_i)$	Loi de probabilité	Coefficient de sensibilité C_i	Contribution en termes d'incertitude $u_i(y)=\lvert C_i\rvert \cdot u(x_i)$
X_1	x_1	$u(x_1)$		C_1	$u_1(y)=\lvert C_1\rvert \cdot u(x_1)$

X_2	x_2	$u(x_2)$		C_2	$u_2(y)=\|C_2\| \cdot u(x_2)$
:	:	:		:	:
X_N	x_N	$u(x_N)$		C_N	$u_N(y)=\|C_N\| \cdot u(x_N)$
Y	y				$u(y)$

Présentation n°2 du budget d'incertitude

Origine	Incertitude-type $u(x_i)$	Loi de probabilité	Coefficient de sensibilité λ_i	Contribution en termes d'incertitude
1 : MESURANDE Variation V1 Variation V2	 u_1 u_2		 λ_1 λ_2	 $\|\lambda_1\|.u_1$ $\|\lambda_2\|.u_2$
2 : INSTRUMENT DE MESURE I1 : I2 : I3 :	 u_3 u_4 u_5		 λ_3 λ_4 λ_5	 $\|\lambda_3\|.u_3$ $\|\lambda_4\|.u_4$ $\|\lambda_5\|.u_5$
3 : METHODE DE MESURE M1 : M2 : M3 :	 u_6 u_7 u_8		 λ_6 λ_7 λ_8	 $\|\lambda_6\|.u_6$ $\|\lambda_7\|.u_7$ $\|\lambda_8\|.u_8$
4 : GRANDEURS D'INFLUENCE G1 : G2 : G3 :	 u_9 u_{10} u_{11}		 λ_9 λ_{10} λ_{11}	 $\|\lambda_9\|.u_9$ $\|\lambda_{10}\|.u_{10}$ $\|\lambda_{11}\|.u_{11}$
5 : OPERATEURS	u_{12}		λ_{12}	$\|\lambda_{12}\|.u_{12}$
INCERTITUDE TOTALE (Somme algébrique des corrections)				$u = \sqrt{\sum_j \lambda_j^2 u_j^2}$

5.6.1 Lorsque les grandeurs d'entrée sont corrélées

Lorsque les grandeurs d'entrée sont corrélées, l'expression convenable pour la variance composée $u_C^2(y)$ est :

$$u_C^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)$$

Où *xi* et *xj* sont les estimations de X_i et X_j et $u(x_i, x_j) = u(x_j, x_i)$ est la covariance estimée associée à x_i et x_j.

Le degré de corrélation entre *xi* et *xj* est caractérisé par le **coefficient de corrélation :**

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)}$$

Où $r(x_i, x_j) = r(x_j, x_i)$ et $-1 \leq r(x_i, x_j) \leq +1$

Si les estimations *xi* et *xj* sont indépendantes, $r(x_i, x_j) = 0$

Ainsi,

$$u_C^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} c_i c_j u(x_i)u(x_j)r(x_i, x_j)$$

5.6.2 Valeur de la covariance de deux variables avec deux moyennes arithmétiques

Considérons deux moyennes arithmétiques q et r qui estiment les espérances mathématiques $\mu_q \; et \; \mu_r$ de deux grandeurs q et r variant au hasard, et supposons que q et r soient calculés à partir de n paires indépendantes d'observations simultanées de q et r faites dans les mêmes conditions de mesure.

Alors, la covariance de q et r est estimée par :

$$s(\bar{q}, \bar{r}) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(q_k - \bar{q})(r_k - \bar{r})$$

Et

$$r(x_i, x_j) = r(\bar{X}_i, \bar{X}_j) = s(\bar{X}_i, \bar{X}_j)/[s(\bar{X}_i)s(\bar{X}_j)]$$

5.7 Détermination de l'incertitude élargie

5.7.1 Incertitude élargie

La nouvelle mesure de l'incertitude qui satisfait à l'exigence de fournir un intervalle tel qu'indiqué est appelée *incertitude élargie* et se note *U*.

L'incertitude élargie *U* s'obtient en multipliant l'incertitude-type composée $u_C(y)$ par un *facteur d'élargissement k* :

$$U = ku_C(y)$$

Il est alors commode d'exprimer le résultat d'un mesurage sous la forme *Y* = *y* ± *U*, qui s'interprète comme signifiant que la meilleure estimation de la valeur attribuable au mesurande *Y* est *y*, et qu'on peut s'attendre à ce que l'intervalle de *y* - *U* à *y* +*U* comprenne une fraction élevée de la distribution des valeurs qui pourraient être attribuées raisonnablement à *Y*.

Un tel intervalle s'exprime aussi par : $y - U \leq Y \leq y + U$

Cet intervalle est appelé **intervalle de confiance** ou **niveau de confiance** en français.

Ce qui correspondant en anglais à « confidence level » ou « level of confidence » pris dans son sens littéral.

5.7.2 Choix d'un facteur d'élargissement

La valeur du facteur d'élargissement *k* est choisie sur la base du niveau de confiance requis pour l'intervalle *y* - *U* à *y* + *U*. En général, *k* sera dans la plage de **2 à 3**.

Cependant, pour des applications spéciales, *k* peut être choisi en dehors de cette plage. Une grande expérience et une connaissance étendue des utilisations dans lesquelles peut entrer un résultat de mesure peut faciliter le choix d'une valeur convenable pour *k*.

On peut trouver parfois qu'une correction connue b pour un effet systématique n'a pas été appliquée au résultat donné d'un mesurage mais qu'on a essayé de prendre l'effet en compte en élargissant l'«incertitude» affectée au résultat. Cela doit être évité. Ne pas appliquer de correction au résultat d'un mesurage pour un effet systématique significatif connu devrait être réservé à des circonstances très spéciales.

5.7.3 Degrés de liberté et niveaux de confiance

L'incertitude élargie $U_p = k_p u_c(y)$ est obtenue à partir de l'estimation y du mesurande Y et de l'incertitude-type composée $u_c(y)$ de cette estimation. À partir de cette incertitude élargie, on définit un intervalle $y - U_p < Y < y + U_p$ qui correspond à une probabilité ou à un niveau de confiance p, spécifiés et élevés.

Le facteur d'élargissement k_p produit, autour du résultat de mesurage y, un intervalle dont on peut s'attendre à ce qu'il comprenne une fraction spécifiée p élevée de la distribution des valeurs qui pourraient être attribuées raisonnablement au mesurande Y.

Par exemple, pour une grandeur z décrite par une loi normale d'espérance mathématique z et d'écart-type σ, il est facile de calculer la valeur de k_p qui donne un intervalle $\mu_Z \pm k_p\sigma$ comprenant la fraction *p* de la loi et donc à une probabilité ou un niveau de *p.*

Niveau de confiance *p* (pourcentage)	**Facteur d'élargissement** k_p
68,27	1
90	1,645
95	1,960
95,45	2
99	2,576
99,73	3

La loi de **t ou loi de Student** et les degrés de liberté

Selon la loi de t et des dégrés de liberté, on a :

$$U_p = k_p u_c(y) = t_p(\nu) u_c(y)$$

Et

$$k_p = t_p(\nu)$$

Nombre effectif de degrés de liberté

En faisant une approximation de la loi de cette variable par une loi de t avec un nombre effectif de degrés de liberté ν_{eff} obtenu par la formule de Welch-Satterthwaite :

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}}$$

Détermination du nombre de degrés de liberté cas d'une méthode de type A

Le nombre de degrés de liberté v est égal à $n - 1$ pour une grandeur unique estimée par la moyenne arithmétique de n observations indépendantes.

Si les n observations indépendantes sont utilisées pour déterminer à la fois la pente et l'ordonnée à l'origine d'une droite par la méthode des moindres carrés, le nombre de degrés de liberté de leurs incertitudes-types respectives est $v = n - 2$. Pour un ajustement par méthode des moindres carrés de *m paramètres* pour n données, le nombre de degrés de liberté de l'incertitude-type de chaque paramètre est $v = n - m$

Détermination du nombre de degrés de liberté cas d'une méthode de Type B

Pour une évaluation de Type B de l'incertitude-type, c'est une grandeur subjective dont la valeur s'obtient par un jugement scientifique fondé sur l'ensemble des informations disponibles.

$$\nu_i \approx \frac{1}{2}\frac{u^2(x_i)}{\sigma^2[u(x_i)]} = \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)}\right]^{-2}$$

Les degrés de liberté associés à une incertitude-type u(xi), obtenus à partir d'une évaluation de Type B avec des limites inférieure et supérieure a− et a +, sont définis de telle sorte que la probabilité que la quantité en question se situe en dehors de ces limites est extrêmement faible, les degrés de liberté peuvent être considérés $\nu_i = \infty$

Exemple : D'après ce que l'on sait de la manière dont l'estimation d'entrée xi et son incertitude-type $u(x_i)$ ont été évaluées, on est conduit à juger que la valeur de $u(x_i)$ est fiable à environ 25 pourcent. Cela peut être considéré comme signifiant que l'incertitude relative est $\Delta u(x_i)/u(x_i)$ = 0,25 et en conséquence, que $v_i = (0,25)^{-2}/2 = 8$. Si l'on estimait que la valeur de u(xi) est fiable à 50 pourcent seulement, vi serait alors égal à 2.

En fonction des besoins des utilisateurs potentiels d'un résultat de mesure, il peut être utile, en complément à v_{eff}, de calculer et de donner aussi les valeurs de v_{effA} et v_{effB}, en traitant séparément les incertitudes-types obtenues par les évaluations de Type A et de Type B. Si l'on note respectivement $u_{cA}^2(y)$ et $u_{cB}^2(y)$ les contributions à $u_c^2(y)$ des incertitudes-types de Type A et de Type B, les différentes grandeurs sont reliées par :

$$u_c^2(y) = u_{cA}^2(y) + u_{cB}^2(y)$$

Et

$$\frac{u_c^4(y)}{\nu_{eff}} = \frac{u_{cA}^4(y)}{\nu_{effA}} + \frac{u_{cB}^4(y)}{\nu_{effB}}$$

Exemple : Supposons que $Y = f(X_1, X_2, X_3) = bX_1X_2X_3$ et que les grandeurs d'entrée x_1, x_2, x_3 étant normalement distribuées, leurs estimations X_1, X_2, X_3 soient respectivement les moyennes arithmétiques de $n_1 = 10$, $n_2 = 5$, et $n_3 = 15$ observations répétées indépendantes, avec les incertitudes-types relatives $\frac{u(x_1)}{x_1} = 0{,}25$ pourcent, $\frac{u(x_2)}{x_2} = 0{,}57$ pourcent, et $\frac{u(x_3)}{x_3} = 0{,}82$ pourcent.
Dans ce cas $C_i = \partial f / \partial X_i = Y/X_i$
évalué à x_1, x_2, x_3

$$[u_C(y)/y]^2 = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{u(x_i)}{x_i}\right)^2 = (1{,}03\, pourcent)^2$$

La formule de Welch-Satterthwaite devient avec les incertitudes relatives :

$$\nu_{eff} = \frac{[u_C(y)/y]^4}{\sum_{i=1}^{3} \frac{[u(x_i)/x_i]^4}{\nu_i}}$$

On a :

$$\nu_{eff} = \frac{1{,}03^4}{\frac{0{,}25^4}{10-1} + \frac{0{,}57^4}{5-1} + \frac{0{,}82^4}{15-1}} = 19{,}0$$

La valeur de t_p pour $p = 95$ pourcent et $v = 19$ est (selon la table) $t_{95}(19) = 2{,}09$; l'incertitude élargie relative pour ce niveau de confiance est alors $U_{95} = 2{,}09 \times (1{,}03$ *pour-cent*$) = 2{,}2$ *pourcent.*

On peut alors énoncer que $Y = y \pm U_{95} = y(1 \pm 0{,}022)$

5.8 Expression du résultat d'un mesurage

Lorsqu'on exprime le résultat d'un mesurage et que la mesure de l'incertitude est l'incertitude-type composée $u_C(y)$, on doit :

a) décrire complètement la manière dont le mesurande Y est défini
b) énoncer le résultat du mesurage sous la forme Y = y ± U et donner les unités pour y et U
c) introduire l'incertitude élargie relative $U/\lvert y \rvert$ lorsque cela est approprié (avec la condition $\lvert y \rvert \neq 0$
d) donner la valeur de k utilisée pour obtenir U [ou, pour la commodité de l'utilisateur du résultat, donner la valeur de k et aussi celle de $u_c(y)$]
e) donner le niveau de confiance approximatif associé à l'intervalle y ± U et préciser la manière dont il a été déterminé
f) donner un rapport détaillé qui décrit le mode d'obtention du résultat d'un mesurage et de son incertitude ou faire référence à un document publié qui la comporte

Le rapport détaillé comprend les éléments suivants :

a) donner la valeur de chaque estimation d'entrée x_i et de son incertitude-type $u(x_i)$ en décrivant comment elles ont été obtenues ;
b) donner les covariances estimées ou les coefficients de corrélation estimés (de préférence les deux) associés à toutes les estimations d'entrée qui sont corrélées et donner les méthodes utilisées pour les obtenir ;
c) donner les degrés de liberté pour l'incertitude-type de chaque estimation d'entrée et la manière dont ils sont obtenus ;
d) donner la relation fonctionnelle $Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$ et, lorsqu'elles sont jugées utiles, les dérivées partielles ou les coefficients de sensibilité $\partial f/\partial xi$. Toutefois, il faut donner tout coefficient de ce type déterminé expérimentalement.

Il peut être jugé utile pour les usagers potentiels du résultat de mesure, par exemple pour aider au calcul ultérieur de facteurs d'élargissement ou pour aider à la compréhension du mesurage.

Lorsque la mesure de l'incertitude est $u_C(y)$, il est préférable d'énoncer le résultat numérique du mesurage de l'une **des quatre manières suivantes** :

Soit un étalon de valeur nominale 100 g de masse m_S; u_C est défini par ailleurs dans le document qui exprime le résultat :

1) «m_S = 100,021 47 g avec (une incertitude-type composée) u_C = 0,35 mg.»

2) «m_S = 100,021 47(35) g, où le nombre entre parenthèses est la valeur numérique de (l'incertitude-type composée) u_C qui porte sur les deux derniers chiffres correspondants du résultat fourni.»

3) «m_S = 100,021 47(0,000 35) g, où le nombre entre parenthèses est la valeur numérique de (l'incertitude-type composée) u_C exprimée avec l'unité du résultat fourni.»

4) «m_S = (100,021 47 ± 0,000 35) g, où le nombre qui suit le symbole ± est la valeur numérique de (l'incertitude-type composée) u_C et non un intervalle de confiance.»

L'idéale est de donner l'incertitude sur la forme suivante :

«m_S = (100,021 47 ± 0,000 79) g, où le nombre qui suit le symbole ± est la valeur numérique de (l'incertitude élargie) $U = ku_C$, avec *U* déterminé à partir de (l'incertitude-type composée).

Les valeurs numériques de l'estimation ***y*** et de son incertitude-type $u_C(y)$ ou de son incertitude élargie *U* ne doivent pas être données avec un nombre excessif de chiffres.

Il suffit habituellement de fournir $u_C(y_i)$ et *U* [ainsi que les incertitudes-type $u(x_i)$ des estimations d'entrée x_i avec **deux chiffres significatifs au plus** bien que, dans certains cas, il puisse être nécessaire de retenir des chiffres supplémentaires pour éviter la propagation des erreurs d'arrondis dans les calculs ultérieurs.

Si l'arrondi réduit la valeur numérique de l'incertitude de mesure de plus de 5%, l'arrondissement à la valeur supérieure doit être utilisée.

La valeur numérique du résultat de la mesure **y,** devrait normalement, dans la déclaration finale, être arrondie au chiffre le moins significatif de la valeur de l'incertitude élargie attribuée au résultat de la mesure.

Un résultat de mesure comporte quatre (4) éléments :

1. Valeur numérique avec un nombre correct de décimales
2. Unité
3. Incertitude élargie et le niveau de confiance utilisé pour définir l'intervalle de l'incertitude élargie.
4. Le coefficient d'élargissement utilisé (noté k, par ex. k=2)

5.8.1 Détermination du nombre de chiffres significatifs

Dans un nombre donné, les chiffres autres que zéro sont significatifs. Les zéros s'ils sont placés entête du nombre ne sont pas significatifs.

Exemples :

6,8 ; 2 chiffres significatifs
6,80 ; 3 chiffres significatifs
6800 ; 4 chiffres significatifs
0,68 ; 2 chiffres significatifs

5.8.2 Exemples de coefficient de sensibilité obtenus à par de modèles mathématiques

Fonction	Coefficient de sensibilité
$Y = k_1X_1 + k_2.X_2$	$\lambda_1 = \frac{\partial Y}{\partial X_1} = k_1 ; \lambda_2 = \frac{\partial Y}{\partial X_2} = k_2$
$Y = kX_1X_2$	$\lambda_1 = \frac{\partial Y}{\partial X_1} = kX_2 = \frac{Y}{X_1}; \lambda_2 = \frac{\partial Y}{\partial X_2} = kX_1 = \frac{Y}{X_2}$
$Y = k\frac{X_1}{X_2}$	$\lambda_1 = \frac{\partial Y}{\partial X_1} = \frac{k}{X_2} = \frac{Y}{X_1}; \lambda_2 = \frac{\partial Y}{\partial X_2} = -\frac{kX_1}{X_2^2} = -\frac{Y}{X_2}$
$Y = \frac{k}{X}$	$\lambda = \frac{\partial Y}{\partial X} = -\frac{k}{X^2} = -\frac{Y}{X}$
$Y = kX_1^{\alpha_1}X_2^{\alpha_2}$	$\lambda_1 = \frac{\partial Y}{\partial X_2} = k\alpha_1X_1^{\alpha_1-1}X_2^{\alpha_2} = \alpha_1\frac{Y}{X_1};$ $\lambda_2 = \frac{\partial Y}{\partial X_2} = k\alpha_2X_1^{\alpha_1}X_2^{\alpha_2-1} = \alpha_2\frac{Y}{X_2};$
$Y = kX^2$	$\lambda = \frac{\partial Y}{\partial X} = 2kX = \frac{2Y}{X}$
$Y = \sqrt{X}$	$\lambda = \frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{1}{2\sqrt{X}} = \frac{1}{2Y}$

$Y = e^{kX}$	$\lambda = \frac{\partial Y}{\partial X} = ke^{kX} = kY$
$Y = In(X)$	$\lambda = \frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{1}{X}$

En énonçant les résultats finaux, il peut parfois être approprié d'arrondir les incertitudes au chiffre supérieur plutôt qu'au chiffre le plus proche. Par exemple, $u_C(y)$ = 10,47 mΩ pourrait être arrondi à 11 mΩ. Cependant, le bon sens doit prévaloir et une valeur comme $u(x_i)$ = 28,05 kHz doit être arrondie à la valeur inférieure, 28 kHz.

Les estimations d'entrée et de sortie doivent être arrondies en accord avec leurs incertitudes ; par exemple, si *y* = 10,057 62 Ω avec $u_C(y)$ = 27 mΩ, *y* doit être arrondi à 10,058 Ω.

Les coefficients de corrélation doivent être donnés avec trois chiffres significatifs si leurs valeurs absolues sont proches de l'unité.

5.9 Récapitulation de la procédure d'évaluation et d'expression de l'incertitude

Les étapes à suivre pour évaluer et exprimer l'incertitude du résultat d'un mesurage, telles qu'elles sont présentées dans ce guide, peuvent être résumées comme suit :

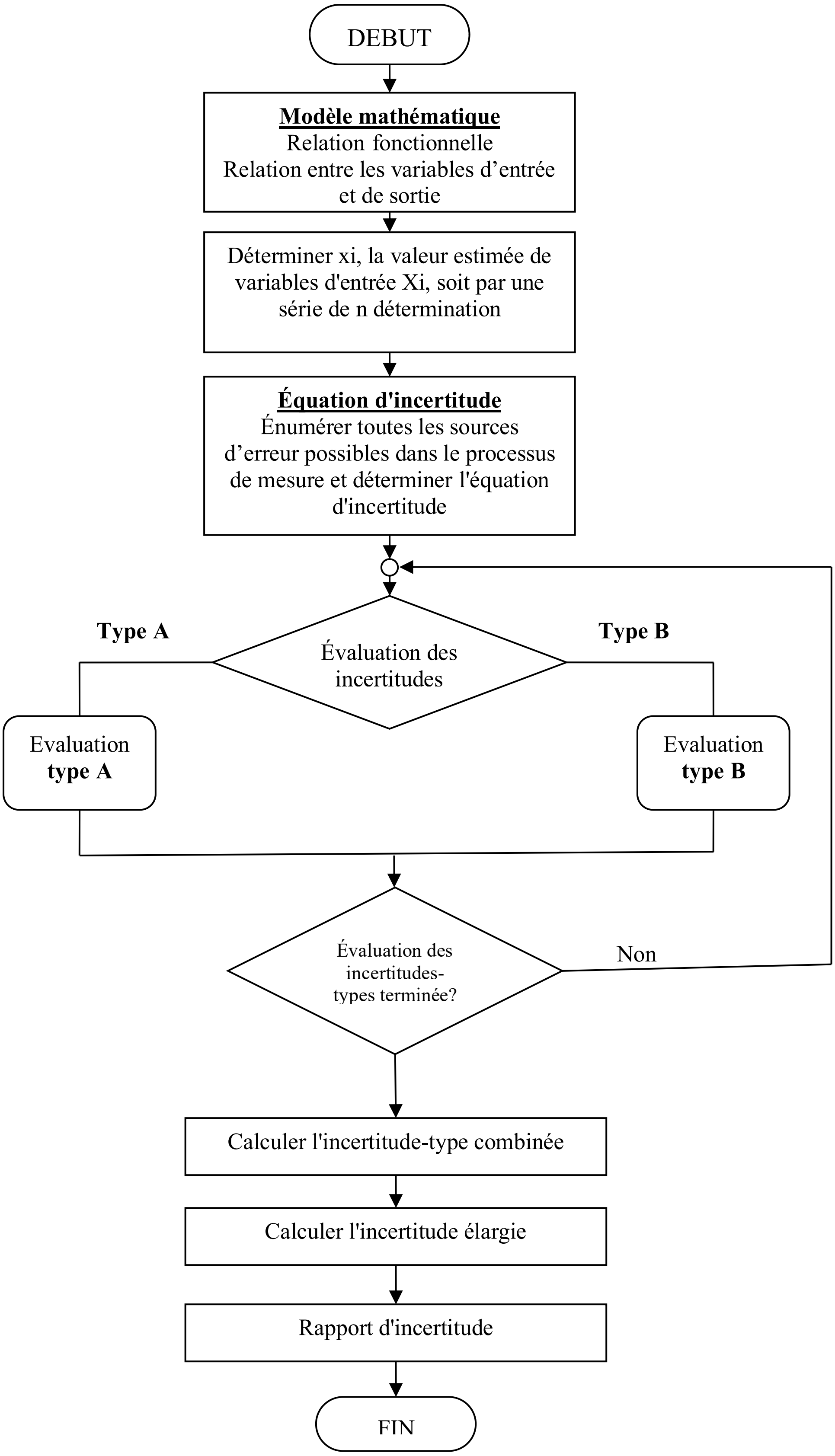
1) Exprimer mathématiquement la relation entre le mesurande *Y* et les grandeurs d'entrée X_i dont *Y* dépend : $Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$. La fonction *f* doit contenir chaque grandeur, y compris toutes les corrections et facteurs de correction qui peuvent contribuer à une composante significative de l'incertitude du résultat du mesurage.
2) Déterminer *xi*, la valeur estimée de la grandeur d'entrée *Xi*, soit sur la base de l'analyse statistique de séries d'observations, soit par d'autres moyens.
3) Évaluer *l'incertitude-type u*(*xi*) de chaque estimation *xi*. Pour une estimation d'entrée obtenue par l'analyse statistique de séries d'observations, effectuer une *évaluation de Type A de l'incertitude-type*. Pour une estimation d'entrée obtenue par d'autres moyens, effectuer une *évaluation de Type B de l'incertitude-type*.
4) Évaluer les covariances associées à toutes les estimations d'entrée qui sont corrélées.
5) Calculer le résultat du mesurage, c'est-à-dire l'estimation *y* du mesurande *Y*, à partir de la relation fonctionnelle *f* en utilisant pour les grandeurs d'entrée *Xi* les estimations *xi* obtenues à l'étape 2.
6) Déterminer *l'incertitude-type composée* $u_c(y)$ du résultat de mesure *y* à partir des incertitudes-types et des covariances associées aux estimations d'entrée. Si le mesurage détermine simultanément plusieurs grandeurs de sortie, calculer leurs covariances.
7) S'il est nécessaire de donner une *incertitude élargie U*, avec pour objectif de fournir un intervalle de *y* – *U* à *y* + *U* dont on peut s'attendre à ce qu'il comprenne une fraction élevée de la distribution des valeurs qui pourraient être attribuées raisonnablement au mesurande *Y*, multiplier l'incertitude-type composée $u_c(y)$ par un *facteur d'élargissement k*, typiquement situé dans la plage de 2 à 3, pour obtenir $U = ku_c(y)$. Choisir *k* sur la base du niveau de confiance requis pour l'intervalle.
8) Donner dans un rapport le résultat du mesurage *y* avec son incertitude-type composée $u_c(y)$ ou son incertitude élargie *U*. Utiliser l'un des modes d'expression recommandés. Décrire, comment les valeurs de *y* et $u_c(y)$ ou *U* ont été obtenues.

Tableau des Valeurs de $t_p(v)$ de la loi de t pour v degrés de liberté, qui définit un intervalle de $-t_p(v)$ à $+t_p(v)$ comprenant la fraction p de la loi

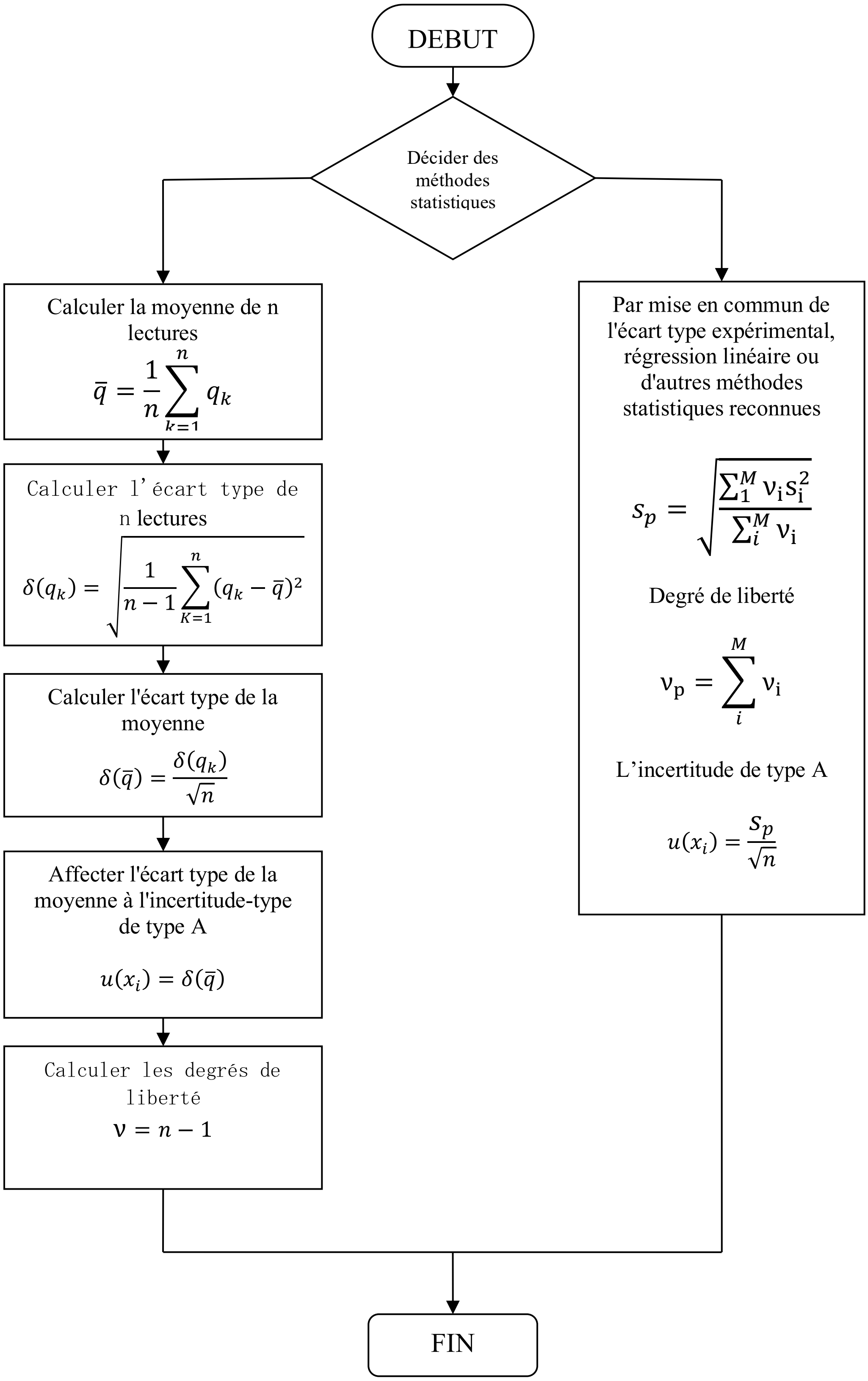
Degrés de liberté	Fraction **p** en pourcentage					
v	68.27[a]	90.00	95.00	95.45[a]	99.00	99.73[a]
1	1.84	6.31	12.71	13.97	63.66	235.8
2	1.32	2.92	4.30	4.53	9.92	19.21
3	1.20	2.35	3.18	3.31	5.84	9.22
4	1.14	2.13	2.78	2.87	4.60	6.62
5	1.11	2.02	2.57	2.65	4.03	5.51
6	1.09	1.94	2.45	2.52	3.71	4.90
7	1.08	1.89	2.36	2.43	3.50	4.53
8	1.07	1.86	2.31	2.37	3.36	4.28
9	1.06	1.83	2.26	2.32	3.25	4.09
10	1.05	1.81	2.23	2.28	3.17	3.96
11	1.05	1.80	2.20	2.25	3.11	3.85
12	1.04	1.78	2.18	2.23	3.05	3.76
13	1.04	1.77	2.16	2.21	3.01	3.69
14	1.04	1.76	2.14	2.20	2.98	3.64
15	1.03	1.75	2.13	2.18	2.95	3.59
16	1.03	1.75	2.12	2.17	2.92	3.54
17	1.03	1.74	2.11	2.16	2.90	3.51
18	1.03	1.73	2.10	2.15	2.88	3.48
19	1.03	1.73	2.09	2.14	2.86	3.45
20	1.03	1.72	2.09	2.13	2.85	3.42
25	1.02	1.71	2.06	2.11	2.79	3.33
30	1.02	1.70	2.04	2.09	2.75	3.27
35	1.01	1.70	2.03	2.07	2.72	3.23
40	1.01	1.68	2.02	2.06	2.70	3.20
45	1.01	1.68	2.01	2.06	2.69	3.18
50	1.01	1.68	2.01	2.05	2.68	3.16
100	1.005	1.660	1.984	2.025	2.626	3.077
∞	1.000	1.645	1.960	2.000	2.576	3.000

a) Pour une grandeur z décrite par une loi normale d'espérance mathématique μ_z et d'écart-type σ, l'intervalle $\mu_z \pm k\sigma$ comprend respectivement p = 68,27 pourcent, 95,45 pourcent et 99,73 pourcent de la loi pour k = 1, 2 et 3.

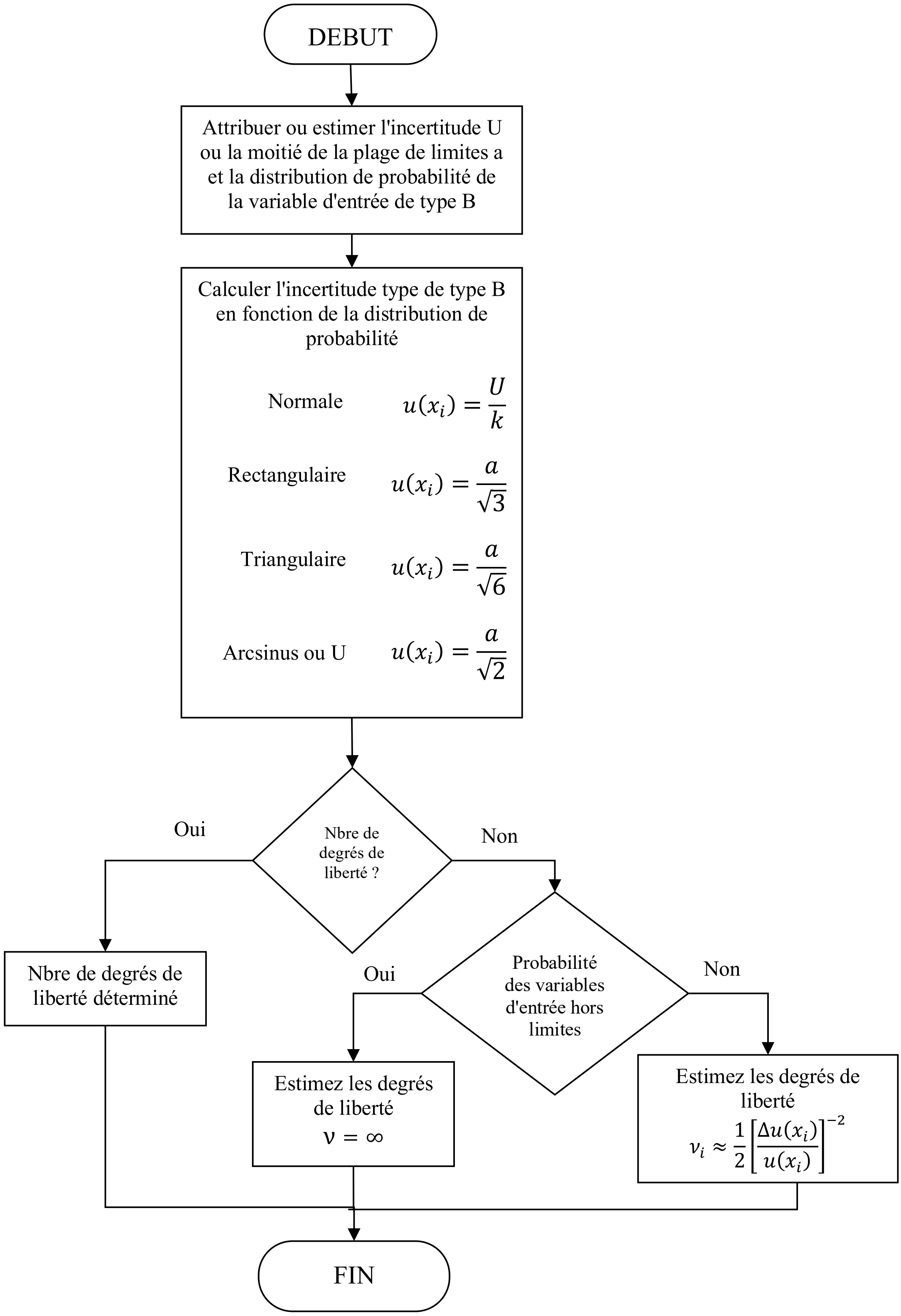
SCHÉMA RÉSUMÉ DE L'ÉVALUATION DE LA MESURE INCERTITUDE



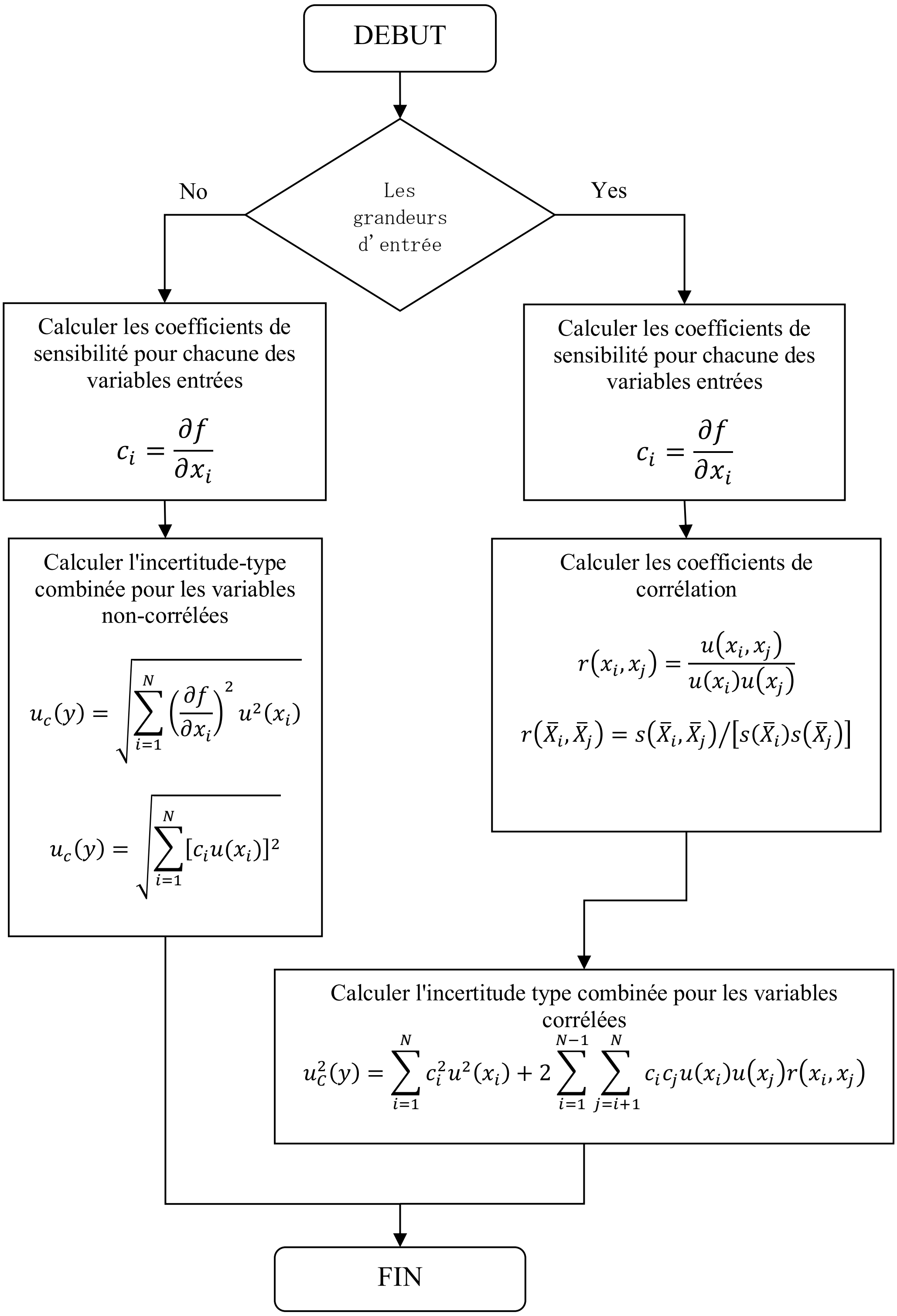
SCHEMA D’EVALUATION DES INCERTITUDES DE TYPE A



SCHEMA D’EVALUATION DES INCERTITUDES DE TYPE B



SCHEMA DE CALCUL DE L'INCERTITUDE-TYPE COMBINEES


DEBUT
Les grandeurs d’ entrée
No
Yes
Calculer les coefficients de sensibilité pour chacune des variables entrées
$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$
Calculer les coefficients de sensibilité pour chacune des variables entrées
$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$
Calculer l'incertitude-type combinée pour les variables non-corrélées
$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)}$
$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} [c_i u(x_i)]^2}$
Calculer les coefficients de corrélation
$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)}$
$r(\bar{X}_i, \bar{X}_j) = s(\bar{X}_i, \bar{X}_j)/[s(\bar{X}_i)s(\bar{X}_j)]$
Calculer l'incertitude type combinée pour les variables corrélées
$u_C^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} c_i c_j u(x_i)u(x_j)r(x_i, x_j)$
FIN

SCHEMA DE CALCUL DE L'INCERTITUDE ELARGIE

DEBUT

Calculer les degrés de liberté effectifs de l'incertitude-type combinée

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}}$$

Obtenez le facteur de couverture **k** à partir du tableau de distribution «t» aux degrés de liberté et le niveau de

Calcul de l' incertitude élargie

$$U = ku_C(y)$$

FIN

6 QUELQUES EXEMPLES DE CALCUL D'INCERTITUDES DE MESURE

EXEMPLE 1: DETERMINATION DES COEFFICIENTS DE SENSIBILITE DES FONCTIONS SUIVANTES

Lorsqu'on applique une différence de potentiel V aux bornes d'une résistance dont la valeur dépend de la température, de la résistance R_0 à la température définie t_0 et du coefficient linéaire de température α, la puissance P (le mesurande) dissipée par la résistance à la température *t* est fonction de V, R_0, α et *t* selon la formule :

$$P = f(V, R_0, \alpha, t) = V^2/\{R_0[1+\alpha(t-t_0)]\}$$

$$\frac{\partial P}{\partial V} = 2V/\{R_0[1+\alpha(t-t_0)]\} = 2P/V$$

$$\frac{\partial P}{\partial R_0} = -V^2/\{R_0^2[1+\alpha(t-t_0)]\} = -P/R_0$$

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha} = -V^2(t-t_0)/\{R_0[1+\alpha(t-t_0)]^2\} = -P(t-t_0)/[1+\alpha(t-t_0)]$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -V^2\alpha/\{R_0[1+\alpha(t-t_0)]^2\} = -P\alpha/[1+\alpha(t-t_0)]$$

Lors de la mesure du grossissement d'une lunette afocale, on relève des positions :

- sur le banc graduée en mm
- sur le vernier du viseur graduée en 1/10 mm

Soit x_1, la première position, repérée sur le banc, de l'objet AB, position éloignée de L, et x'_1, celle de la crémaillère du viseur visant A'B'.

Soit x_2, une nouvelle position de l'objet, proche de L et repérée toujours par lecture directe sur le banc et x'_2, la nouvelle position de la crémaillère du viseur, qui lui, ne s'est pas déplacé sur le banc.

Le grossissement G est donné par la formule suivante :

$$G = f(x_1, x_2, x'_1, x'_2) = \sqrt{\frac{x_1 - x_2}{x'_1 - x'_2}}$$

$$u^2(G) = \left(\frac{\partial G}{\partial x_1}\right)^2 u^2(x_1) + \left(\frac{\partial G}{\partial x_2}\right)^2 u^2(x_2) + \left(\frac{\partial G}{\partial x'_1}\right)^2 u^2(x'_1) + \left(\frac{\partial G}{\partial x'_2}\right)^2 u^2(x'_2)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = \frac{1}{2G} \cdot \frac{1}{(x'_1 - x'_2)}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_2} = \frac{1}{2G} \cdot \frac{-1}{(x_1' - x_2')}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_1'} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G}{(x_1' - x_2')}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_2'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{G}{(x_1' - x_2')}$$

EXEMPLE 2 : ETALONNAGE D'UNE MASSE

Détermination des coefficients de sensibilité, de l'incertitude-type combiné, de l'incertitude élargie et du budget d'incertitude lors de l'étalonnage d'une masse.

Dans le cadre de notre application, s_x est déterminée lors de l'évaluation du comparateur en réalisant un essai de répétabilité sur 10 séries de 4 pesées (ABBA) d'une charge simulant le poids à étalonner.

Détermination de l'incertitude suivant les deux types de méthodes d'évaluation de l'incertitude :

- **les méthodes de type A :** celles qui sont évaluées suivant une méthode statistique

- **les méthodes de type B :** celles qui sont évaluées par d'autres moyens

Les composantes de type A

L'incertitude de répétabilité u_A correspond à l'écart type des n déterminations :

$$u_A = \frac{s_x}{\sqrt{n}}$$

avec $s_x = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \bar{x})}{n-1}}$

Pour tenir compte d'une éventuelle dérive du comparateur, s_x est remplacée par $s_x(max())$, l'estimation de $s_x(max())$. Par conséquent :

$$u_A = \frac{s_x(max())}{\sqrt{n}}$$

n étant le nombre de cycles de mesures effectuées au cours de l'étalonnage.

Les composantes de type B

L'incertitude-type due au pas de quantification (résolution) u_{B1}

L'incertitude-type due au pas de quantification du comparateur pour une distribution rectangulaire est :

$$u_{B1} = \frac{d/2}{\sqrt{3}}$$

Compte tenu du fait que l'étalonnage se fait avec deux masses (l'étalon et la masse), l'incertitude type sur le pas de quantification est comptée deux fois, ce qui équivaut à un facteur multiplicatif de $\sqrt{2}$.

$$u_{B1} = \frac{d/2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2} = \frac{d}{\sqrt{6}}$$

L'incertitude-type de l'étalon de masse u_{B2}

L'incertitude d'étalonnage de l'étalon de masse est obtenue à partir de son certificat d'étalonnage. Le certificat d'étalonnage donne l'incertitude d'étalonnage U_E du poids étalon avec un facteur d'élargissement k égale à 2. Par conséquent l'incertitude-type d'étalonnage est :

$$u_{B2} = \frac{U_E}{k}$$

Dans le cas où plusieurs étalons sont utilisés dans le cadre de comparaison, l'incertitude d'étalonnage U_E de l'étalonnage est égale à la somme algébrique de l'incertitude d'étalonnage des étalons utilisés :

$$U_E = \sum_i U_{Ei}$$

L'incertitude-type de pérennité de l'étalon de masse u_{B3}

Deux situations peuvent se présenter :

Si l'on ne dispose pas d'information concernant les étalonnages antérieurs ou si l'étalon est à son premier étalonnage, alors l'incertitude-type de pérennité de l'étalon peut être calculé à partir de son incertitude d'étalonnage :

$$u_{B3} = u_{B2} = \frac{U_E}{2}$$

Si l'on dispose d'information sur les étalonnages antérieurs, l'incertitude de pérennité peut aussi être calculé à partir du plus grand écart de masse entre deux étalonnages ΔE.

$$u_p = \frac{|\Delta E|}{\sqrt{3}}$$

L'incertitude-type de pérennité à retenir est :

$$u_{B3} = max(u_{B2}, u_p)$$

L'incertitude-type due à la masse volumique de l'air u_{B4} ;

La formule pour la détermination de la masse volumique de l'air est donnée par la formule du Comité international des Poids et Mesure (CIPM) de 1981/1991 :

$$\rho_a = \frac{p \cdot M_a}{ZRT}\left[1 - x_v\left(1 - \frac{M_v}{M_a}\right)\right]$$

Ou $\boldsymbol{p}$ *=la pression*

M_a *=Masse molaire de l'air sec*
Z *=Facteur de compressibilité*
R *=Constante molaire des gaz*
T *=Température thermodynamique*
x_v *=Fraction molaire de vapeur d'eau*
M_v *=Masse molaire de vapeur d'eau*

La formule simplifiée la plus exacte pour la détermination de la masse volumique de l'air est la suivante :

La formule simplifiée la plus précise pour la détermination de la masse volumique de l'air est donnée par l'annexe E de la R111 :

$$\rho_a = \frac{0{,}34848 \cdot p - 0{,}009 \cdot hr \cdot exp(0{,}061 \cdot t)}{273{,}15 + t} \text{ (kg/m}^3\text{)} \qquad \textbf{(15)}$$

avec une incertitude relative de l'ordre de 2.10^{-4}*(*$\frac{\Delta\rho_a}{\rho_a}$*)*

où p *s'exprime en hPa ;* $900hPa < p < 1100hPa$
hr *s'exprime en pourcent (%) exemple 40 pour 40% ;* $hr < 80\%$
t *s'exprime en °C;* $10°C < t < 30°C$

Appliquons la loi de propagation des incertitudes à la masse volumique de l'air :

On a $\rho_a = f(p, t, hr)$

$$u_c^2(\rho_a) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)$$

Les estimations de x_i *et* x_j étant indépendantes, les coefficients de corrélation sont nuls et par conséquent les covariances sont nulles et l'équation se réduit à l'expression suivante :

$$u_c^2(\rho_a) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot u^2(x_i)$$

Calculons les coefficients de sensibilité : $c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$

on a : $\frac{\partial \rho_a}{\partial p} = \frac{0{,}34848}{273{,}15+t}$ $\quad \frac{\partial \rho_a}{\partial t} = \frac{-0{,}34848 \cdot p + 0{,}009 \cdot hr \cdot [1 - 0{,}061 \cdot (273{,}15 + t)] \cdot exp(0{,}061 \cdot t) \cdot}{(273{,}15+t)^2}$

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial hr} = -\frac{0{,}009 \cdot exp(0{,}061 \cdot t)}{273{,}15 + t}$$

En prenant les valeurs moyennes t= 20°C ; p=1013 hPa et hr=50% on obtient :

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial p} = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} = -4{,}4 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial hr} = -1 \cdot 10^{-4}$$

$$u_c^2(\rho_a) = u^2(formule) + (1{,}2 \cdot 10^{-3})^2 \cdot u^2(p) + (4{,}4 \cdot 10^{-3}) \cdot u^2(t) + (1 \cdot 10^{-4})^2 \cdot u^2(hr)$$

avec $u(formule) = \rho_a \cdot 2 \cdot 10^{-4}$

L'incertitude-type due à la masse volumique de l'étalon u_{B5} ;

Pour les masses de classe E_2, F_1, F_2, M_1, M_2 et M_3, les valeurs sont données par la recommandation R111 de l'OIML figurant dans le tableau ci-dessous.

L'incertitude-type due à la masse volumique de la masse à étalonner u_{B6} ;

Pour les masses de classe E_2, F_1, F_2, M_1, M_2 et M_3, les valeurs sont données par la recommandation R111 de l'OIML figurant dans le tableau ci-dessous.

Alliage	Masse volumique en kg/m^3	Incertitude (k=2) en kg/m^3
Platine	21 400	150
Nickel d'argent	8 600	170
Laiton	8 400	170
Acier inoxydable	7 950	140
Fer	7 800	200
Fonte de fer (blanche)	7 700	400
Acier carbone	7 700	200
Etain	7 300	100
Fonte de fer (grise)	7 100	600
Aluminium	2 700	130

Première méthode d'estimation de l'incertitude-type composée

Calculons les coefficients de sensibilité de la fonction suivante. $\boldsymbol{M_c = f(X, E_c, \rho_a, \rho_m, \rho_e)}$

$$M_c = X + E_c \cdot \left(1 + (\rho_a - \rho_{ao}) \cdot \left(\frac{1}{\rho_m} - \frac{1}{\rho_e}\right)\right)$$

$$\frac{\partial M_c}{\partial X} = 1$$

$$\frac{\partial M_c}{\partial E_c} = 1$$

$$\frac{\partial M_c}{\partial \rho_a} = \left(\frac{1}{\rho_m} - \frac{1}{\rho_e}\right) \cdot E_c$$

$$\frac{\partial M_c}{\partial \rho_e} = \left(\frac{\rho_a - \rho_{ao}}{\rho_e^2}\right) \cdot E_c$$

$$\frac{\partial M_c}{\partial \rho_m} = -\left(\frac{\rho_a - \rho_{ao}}{\rho_m^2}\right) \cdot E_c$$

L'incertitude-type composée s'obtient en appliquant la loi de propagation des incertitudes tout en admettant que les variables sont non-corrélées.

$$u_c^2(M_c) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot u^2(x_i)$$

$$u_c(M_c) = \sqrt{\left(\frac{\partial M_c}{\partial X}\right)^2 \cdot u^2(X) + \left(\frac{\partial M_c}{\partial E_c}\right)^2 \cdot u^2(E_c) + \left(\frac{\partial M_c}{\partial \rho_a}\right)^2 \cdot u^2(\rho_a) + \left(\frac{\partial M_c}{\partial \rho_e}\right)^2 \cdot u^2(\rho_e) + \left(\frac{\partial M_c}{\partial \rho_m}\right)^2 \cdot u^2(\rho_m)}$$

Détermination de l'incertitude élargie

L'incertitude élargie est déterminée en multipliant l'incertitude-type composé par le facteur d'élargissement k = 2.

$$U = \pm 2 \cdot u_c$$

Tableau récapitulatif du bilan d'incertitude

Composante d'incertitude	Symbole	Incertitude-type		Coefficient sensibilité	Contribution en termes d'incertitude typ
		Type A	Type B		
Répétabilité sur la Moyenne des n déterminations	u_A	$u_A = \frac{s_x}{\sqrt{n}}$		1	
Résolution du comparateur	u_{B1}		$u_{B1} = \frac{d}{\sqrt{6}}$	1	
Etalonnage de l'étalon	u_{B2}		$u_{B2} = \frac{U_E}{k}$	1	

Pérennité de l'étalon	u_{B3}		$u_{B3} = max(u_{B2}, u_p)$	1	
Masse volumique de l'air	$\boldsymbol{u_{B4}}$		$u(\rho_a)$	$\left(\frac{1}{\rho_m} - \frac{1}{\rho_e}\right) \cdot E_c$	
Masse volumique de l'étalon	$\boldsymbol{u_{B5}}$		$u(\rho_e)$	$\left(\frac{\rho_a - \rho_{ao}}{\rho_e^2}\right) \cdot E_c$	
Masse volumique dela masse	$\boldsymbol{u_{B6}}$		$u(\rho_m)$	$-\left(\frac{\rho_a - \rho_{ao}}{\rho_m^2}\right) \cdot E_c$	
L'Incertitude-type composée est déterminée en calculant la somme quadratique des contributions de chaque composante d'incertitudes-type : $u_c = \sqrt{\sum_i u_i^2}$					
L'incertitude élargie est déterminée en multipliant l'incertitude-type composé par le facteur d'élargissement k = 2 : $U = \pm 2u_c$					

Deuxième méthode de calcul

Cette méthode permet d'évaluer la correction due à la poussée de l'air ainsi que son incertitude.

La masse conventionnelle étant égale à :

$$M_c = x + E_c + \left((\rho_a - \rho_{ao}) \cdot \left(\frac{1}{\rho_m} - \frac{1}{\rho_e}\right)\right) \cdot E_c$$

La correction due à la poussée de l'air est donnée par la formule suivante :

$$C = (\rho_a - \rho_{ao}) \cdot \left(\frac{1}{\rho_m} - \frac{1}{\rho_e}\right) \cdot E_c$$

Où

ρ_a est la masse volumique de l'air ;
ρ_{ao} la masse volumique de référence de l'air : 1,2 kg/m^3 ;
ρ_e la masse volumique de l'étalon ;
ρ_m la masse volumique de la masse à étalonner ;
E_c la masse conventionnelle de la masse étalon qui peut être remplacée par la masse nominale de l'étalon.

Détermination de l'incertitude sur la correction de poussée de l'air

Appliquons la loi de propagation des incertitudes en supposant que les variables sont non-corrélées :

$$u_c^2(C) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot u^2(x_i) = \left(\frac{\partial C}{\partial \rho_a}\right)^2 \cdot u^2(\rho_a) + \left(\frac{\partial C}{\partial \rho_e}\right)^2 \cdot u^2(\rho_e) + \left(\frac{\partial C}{\partial \rho_m}\right)^2 \cdot u^2(\rho_m)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \rho_a} = E_c \cdot \left(\frac{\rho_e - \rho_m}{\rho_e \cdot \rho_m}\right)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \rho_m} = -E_c \cdot \left(\frac{\rho_a - \rho_{ao}}{\rho_m^2}\right)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \rho_e} = E_c \cdot \left(\frac{\rho_a - \rho_{ao}}{\rho_e^2}\right)$$

$$u_c^2(C) = \left[E_c \cdot \left(\frac{\rho_e - \rho_m}{\rho_e \cdot \rho_m}\right) \cdot u(\rho_a)\right]^2 + [E_c \cdot (\rho_a - \rho_{ao})]^2 \cdot \left(\frac{u^2(\rho_e)}{\rho_e^4} + \frac{u^2(\rho_m)}{\rho_m^4}\right)$$

Lorsqu'on considère que les variables sont corrélées, on obtient selon la R111 :

$$u_c^2(C) = \left[E_c \cdot \left(\frac{\rho_e - \rho_m}{\rho_e \cdot \rho_m}\right) \cdot u(\rho_a)\right]^2 + [E_c \cdot (\rho_a - \rho_{ao})]^2 \cdot \frac{u^2(\rho_m)}{\rho_m^2} - E_c^2(\rho_a - \rho_{ao}) \cdot [(\rho_a - \rho_{ao}) + 2(\rho_{a1} - \rho_a)] \cdot \frac{u^2(\rho_e)}{\rho_e^2}$$

Dans ces différentes expressions, $\boldsymbol{E_c}$ peut être remplacé par la valeur nominale de l'étalon $\boldsymbol{M_o}$

Détermination de la masse volumique de l'étalon ρ_e et de son incertitude $u(\rho_e)$

La valeur de la masse volumique de l'étalon dépend du matériau où de l'alliage à partir duquel a été réalisé l'étalon. Sa masse volumique et l'incertitude qui lui est associé avec un facteur d'élargissement k=2 sont données dans le tableau donné plus haut par la R111.

Exemple : si l'étalon est en acier inoxydable, sa masse volumique et son incertitude sont :

$$\boldsymbol{\rho_e} = \textbf{7950 kg/m}^3$$

$$\boldsymbol{u(\rho_e)} = \frac{U_{\rho e}}{2} = \frac{\pm 140}{2} = \pm\textbf{70 kg/m}^3$$

Détermination de la masse volumique de la masse à étalonner ρ_m et de son incertitude $u(\rho_m)$:

La masse volumique de la masse à étalonner et son incertitude sont données par la recommandation 111 de l'OIML figurant dans le tableau ci-dessous.

Alliage	**Masse volumique en kg/m³**	**Incertitude (k=2) en kg/m³**
Platine	21 400	150
Nickel d'argent	8 600	170
Laiton	8 400	170
Acier inoxydable	7 950	140
Fer	7 800	200
Fonte de fer (blanche)	7 700	400
Acier carbone	7 700	200
Etain	7 300	100

Fonte de fer (grise)	7 100	600
Aluminium	2 700	130

A partir de ces différentes valeurs et de la valeur de la masse nominale de l'étalon, on détermine :

- **La correction due à la poussée de l'air C;**
- **L'incertitude sur cette correction $u_c(C)$.**

L'incertitude-type composée sur la masse conventionnelle à partir de cette méthode s'obtient de la façon suivante :

$$M_c = x + E_c + C$$

avec $$C = \left((\rho_a - \rho_{ao}) \cdot \left(\frac{1}{\rho_m} - \frac{1}{\rho_e}\right)\right) \cdot E_c$$

L'incertitude type composée s'obtient en appliquant la loi de propagation des incertitudes tout en admettant que les variables sont non-corrélées.

$$u_c^2(M_c) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot u^2(x_i)$$

$$u_c(M_c) = \sqrt{\left(\frac{\partial M_c}{\partial X}\right)^2 \cdot u^2(X) + \left(\frac{\partial M_c}{\partial E_c}\right)^2 \cdot u^2(E_c) + \left(\frac{\partial M_c}{\partial C}\right)^2 \cdot u^2(C)}$$

On a :

$$\frac{\partial M_c}{\partial X} = \frac{\partial M_c}{\partial E_c} = \frac{\partial M_c}{\partial C} = 1$$

alors $$u_c(M_c) = \sqrt{u^2(X) + u^2(E_c) + \cdot\, u^2(C)}$$

$$u_c(M_c) = \sqrt{u_A^2 + u_{B1}^2 + u_{B2}^2 + u_{B3}^2 + u^2(C)}$$

avec :

$u_A = \frac{s_x}{\sqrt{n}}$ $u_{B1} = \frac{d}{\sqrt{6}}$ $u_{B2} = \frac{U_E}{k}$ $u_{B3} = max(u_{B2}, u_p)$

$u_p = \frac{|\Delta E|}{\sqrt{3}}$ où ΔE représente la dérive entre deux étalonnages.

Détermination de l'incertitude élargie

L'incertitude élargie est déterminée en multipliant l'incertitude-type composée par le facteur d'élargissement k=2.

$$U = \pm 2u_c$$

EXEMPLE 3: ETALONNAGE D'UN INSTRUSMENT DE MESURE DE MICROVOLUME

Détermination de la moyenne du volume d'eau pure rapporté à 20 °C

$$V_0 = (I_L - I_E) \times \frac{1}{\rho_w - \rho_A} \times \left(1 - \frac{\rho_A}{\rho_B}\right) \times [1 - \gamma(t - t_0)]$$

V_0 volume, température de référence t_0, en mL
I_L résultat de pesée du récipient plein de liquide, en g
I_E résultat de pesée du récipient vide, en g
ρ_w masse volumique du liquide, en g / mL, à la température t (ºC)
ρ_A densité de l'air, en g / ml
ρ_B masse volumique des masses utilisées pendant la mesure (substitution) ou lors de l'étalonnage de la balance, supposée être de 8,0 g / ml
γ coefficient de dilatation thermique cubique du matériau de l'instrument en cours d'étalonnage, en ° C^{-1}
t température liquide utilisée dans l'étalonnage, en °C
t_0 référence température, in ºC

Détermination de la masse volumique de l'eau ρ_w

<u>Formule n° 1</u> : La formule donnée par Tanaka [6] fournit une bonne base pour la normalisation:

$$\rho_w = a_5 \left[1 - \frac{(t + a_1)^2 (t + a_2)}{a_3 (t + a_4)}\right]$$

Où :

t : Température de l'eau, in °C
$a1$ = -3.983035 °C
$a2$ = 301.797 °C
$a3$ = 522528.9 $(°C)^2$
$a4$ = 69.34881 °C
$a5$ = 0.999974950 g/mL

La correction due à la teneur en air de l'eau peut être effectuée selon la formule suivante :

$$\Delta\rho = s_0 + s_1 \cdot t$$

t = Température de l'eau, in °C

s_0 = -4.612×10-6 g/mL
s_1 = 0.106×10-6 g/mL°C

<u>Formule n° 2</u> :

$$\rho_w = \sum_{i=0}^{4} a_i \times t_w^i \qquad = a_0 + a_1 \times t_w + a_2 \times t_w^2 + a_3 \times t_w^3 + a_4 \times t_w^4, \text{ où}$$

a_0 = 999,85308 kg/m³
a_1 = 6,32693 × 10^{-2} °C^{-1} kg/m³
a_2 = –8,523829 × 10^{-3} °C^{-2} kg/m³
a_3 = 6,943248 × 10^{-5} °C^{-3} kg/m³
a_4 = –3,821216 × 10^{-7} °C^{-4} kg/m³
t_w = température de l'eau en °C

Cette équation donne les valeurs de masse volumique de l'eau exprimée en kg/m^3, à **3** décimales près pour une plage de température de 5 °C à 40°C.

Selon la deuxième formule de la masse volumique de l'eau on a :

Incertitude de la masse volumique de l'eau selon GUM :

L'incertitude-type de la masse volumique de l'eau $u(\rho_W)$ vaut :

$$u(\rho_W) = \sqrt{u^2(formule) + u^2(stabilité) + c_w^2 \times u^2(t_w)}$$

Incertitude-type de la formule et de sa composition

On ne peut pas connaître la masse volumique de l'eau avec une incertitude meilleure que **0,015 kg/m^3**, en raison de l'incertitude sur la formule et de la présence ou pas de gaz dissous.

En supposant une distribution rectangulaire, l'incertitude-type est calculée comme suit :

$$u(formule) = (0{,}015)/\sqrt{3}$$

Incertitude-type de la stabilité de ρ_w

En supposant une distribution rectangulaire, l'incertitude-type de la stabilité de la masse volumique de l'eau est calculée comme suit :

$$u(stabilité) = \left(\rho_{W_{début}} - \rho_{W_{fin}}\right)/\sqrt{3}$$

Incertitude-type de la température de l'eau

En supposant une distribution rectangulaire, l'incertitude-type est déterminée à partir de l'incertitude mentionnée dans le certificat d'étalonnage du thermomètre, auquel on associe sa pérennité et celle due à la résolution de l'instrument :

$$u(t_w) = \sqrt{u^2_{resolution} + u^2_{étalonnage} + u^2_{pérénité}}$$

Le coefficient de sensibilité c_W relatif à t_w est :

$$c_W = \frac{\partial \rho_W}{\partial t_W} = \sum_{i=1}^{4} i \times a_i \times t_W^{i-1} = a_1 + 2 \times a_2 \times t_W + 3 \times a_3 \times t_W^2 + 4 \times a_4 \times t_W^3$$

Détermination de la masse volumique de l'air

La formule pour la détermination de la masse volumique de l'air est donnée par la formule du Comité international des Poids et Mesure (CIPM) de 1981/1991 :

$$\rho_a = \frac{p \cdot M_a}{ZRT}\left[1 - x_v\left(1 - \frac{M_v}{M_a}\right)\right]$$

Où p =*la pression*
M_a =*Masse molaire de l'air sec*
Z =*Facteur de compressibilité*
R =*Constante molaire des gaz*
T =*Température thermodynamique*

x_v =*Fraction molaire de vapeur d'eau*
M_v =*Masse molaire de vapeur d'eau*

La formule simplifiée la plus exacte pour la détermination de la masse volumique de l'air est la suivante R111 :

$$\rho_a = \frac{0,34848 \cdot p - 0,009 \cdot hr \cdot exp(0,061 \cdot t)}{273,15 + t} \text{ (kg/m}^3\text{)}$$

Ou

$$\rho_a = \frac{k_1 p_a + h(k_2 t_a + k_3)}{273,15 + t_a}$$

avec les caractéristiques suivantes :

p_a est la pression atmosphérique en hectopascals (hPa),
h est l'humidité relative exprimée comme un pourcentage (ex : 80 % d'humidité relative = 0,8)
t_a est la température de l'air en °C
k_1 est égal à 0,348 44 (kg/m^3)·°C/hPa
k_2 est égal à -0,00252 kg/m^3
k_3 est égal à 0,020 582 (kg/m^3)·°C

avec une incertitude relative de l'ordre de 2.10^{-4} $(\frac{\Delta\rho_a}{\rho_a})$

où p *s'exprime hPa ;* $900hPa < p < 1100hPa$
hr *s'exprime pourcent (%) exemple 40 pour 40% ;* $hr < 80\%$
t *s'exprime en °C;* $10°C < t < 30°C$

Appliquons la loi de propagation des incertitudes à la masse volumique de l'air :

On a $\rho_a = f(p, t, hr)$

$$u_c^2(\rho_a) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)$$

Les estimations de x_i *et* x_j étant indépendantes, les coefficients de corrélation sont nuls et par conséquent les covariances sont nulles et l'équation se réduit à :

$$u_c^2(\rho_a) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot u^2(x_i)$$

Calculons les coefficients de sensibilité : $c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$

on a : $\frac{\partial \rho_a}{\partial p} = \frac{0,34848}{273,15 + t}$

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} = \frac{-0,34848 \cdot p + 0,009 \cdot hr \cdot [1 - 0,061 \cdot (273,15 + t)] \cdot exp(0,061 \cdot t) \cdot}{(273,15 + t)^2}$$

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial hr} = -\frac{0,009 \cdot exp(0,061 \cdot t)}{273,15 + t}$$

En prenant les valeurs moyennes t= 20°C ; p=1013 hPa et hr=50% on obtient :

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial p} = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$$
$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} = -4{,}4 \cdot 10^{-3}$$
$$\frac{\partial \rho_a}{\partial hr} = -1 \cdot 10^{-4}$$

$$u_c^2(\rho_a) = u^2(formule) + (1{,}2 \cdot 10^{-3})^2 \cdot u^2(p) + (4{,}4 \cdot 10^{-3}) \cdot u^2(t) + (1 \cdot 10^{-4})^2 \cdot u^2(hr)$$

avec $u(formule) = \rho_a \cdot 2 \cdot 10^{-4}$

Incertitude-type des paramètres de l'air (*t_a*, *p_a*, *h*)

En supposant une distribution rectangulaire, les incertitudes-types sont déterminées à partir de l'incertitude mentionnée dans le certificat d'étalonnage du thermomètre, auquel on associe sa pérennité et celle due à la résolution de l'instrument :

$$u(t) = \sqrt{u_{res\_th}^2 + u_{étal\_th}^2 + u_{pér\_th}^2}$$

$$u(p) = \sqrt{u_{res\_press}^2 + u_{étal\_press}^2 + u_{pér\_press}^2}$$

$$u(hr) = \sqrt{u_{res\_hyg}^2 + u_{étal\_hyg}^2 + u_{pér\_hyg}^2}$$

Détermination de l'incertitude sur le volume V_0

Une autre expression du volume V_0 est la suivante :

$$V_0 = \frac{m}{\rho_w(t_w) - \rho_A(t_A, p_A, h_r)} \times \left(1 - \frac{\rho_A(t_A, p_A, h_r)}{\rho_B}\right) \times [1 - \gamma(t - t_0)] + \delta V_{men} + \delta V_{evap} + \delta V_{rep}$$

$\boldsymbol{\delta V_{men}}$ Erreur due à la lecture du ménisque

$\boldsymbol{\delta V_{evap}}$ Erreur due aux pertes par évaporation

$\boldsymbol{\delta V_{rep}}$ Erreur due à la répétabilité de la mesure

Détermination des différents coefficients de sensibilité

La formule de V_0 peut être mis sous la forme suivante

$$V_0 = m \times A \times B \times C + \delta V_{men} + \delta V_{evap} + \delta V_{rep}$$

$$m = I_L - I_E$$

$$A = \frac{1}{\rho_w - \rho_A}$$

$$B = \left(1 - \frac{\rho_A}{\rho_B}\right)$$

$$C = [1 - \gamma(t - t_0)]$$

Les résultats du calcul des différents coefficients de sensibilité se présentent comme suit :

Masse :

$$\frac{\partial V_0}{\partial m} = A \times B \times C = \frac{V_0}{m}$$

Température de l'eau :

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} = m \times A \times B \times (-\gamma)$$

Densité de l'Air :

$$\frac{\partial V_0}{\partial \rho_A} = m \times C \times A \times \left[\frac{1}{\rho_w - \rho_A} \times \left(1 - \frac{\rho_A}{\rho_B}\right) - \frac{1}{\rho_B}\right] = m \times A \times C \times \left(B \times A - \frac{1}{\rho_B}\right)$$

Densité des masses :

$$\frac{\partial V_0}{\partial \rho_B} = m \times A \times C \times \left(\frac{\rho_A}{\rho_B^2}\right)$$

Coefficient de dilatation thermique cubique du matériau de l'instrument étalonné :

$$\frac{\partial V_0}{\partial \gamma} = m \times A \times B \times \left(-(t - t_0)\right)$$

Lecture du ménisque :

$$\frac{\partial V_0}{\partial \delta V_{men}} = 1$$

Evaporation :

$$\frac{\partial V_0}{\partial \delta V_{evap}} = 1$$

Répétabilité de la mesure :

$$\frac{\partial V_0}{\partial \delta V_{rep}} = 1$$

L'Incertitude-type combinée est calculée comme suit :

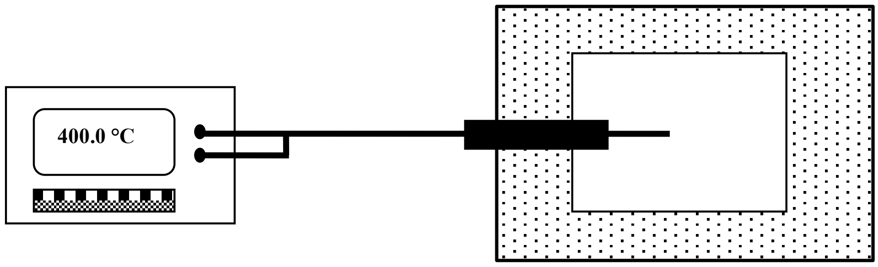
$$u^2(V_0) = \sum_i \left(\frac{\partial V_0}{\partial x_i} \times u(x_i) \right)^2$$

$$u^2(V_0) = \left(\frac{\partial V_0}{\partial m}\right)^2 u^2(m) + \left(\frac{\partial V_0}{\partial t}\right)^2 u^2(t) + \left(\frac{\partial V_0}{\partial \rho_w}\right)^2 u^2(\rho_w) + \left(\frac{\partial V_0}{\partial \rho_A}\right)^2 u^2(\rho_A) + \left(\frac{\partial V_0}{\partial \rho_B}\right)^2 u^2(\rho_B) + \left(\frac{\partial V_0}{\partial \gamma}\right)^2 u^2(\gamma)$$

$$+u^2(\delta V_{men}) + u^2(\delta V_{evap}) + u^2(\delta V_{rep})$$

EXEMPLE 4: MESURE DE LA TEMPÉRATURE À L'AIDE D'UN THERMOCOUPLE

Un thermomètre numérique avec un thermocouple de type K est utilisé pour mesurer la température à l'intérieur d'une chambre de température. Le régulateur de température de la chambre est réglé à 400 ° C. (L'incertitude due aux fuites thermiques est estimée négligeable).



Montage du système de mesure

Thermomètre numérique

Résolution : 0,1 ° C
Incertitude (un an) : ± 0,6 ° C

Thermocouple

Le certificat d'étalonnage du thermocouple de type K donne une incertitude de ± 1,0 ° C avec un niveau de confiance d'environ 95% avec un facteur d'élargissement k égal à 2.
La correction pour le thermocouple à 400 ° C est de 0,5 ° C.

Résultats de mesure enregistrés

Lorsque l'indicateur de la chambre de température atteint 400 ° C, les lectures sont prises après un temps de stabilisation d'une demi-heure. Dix (10) mesures sont effectuées comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

N° mesure	**T (°C)**
1	400,1
2	400,0
3	400,1
4	399,9
5	399,9
6	400,0
7	400,1
8	400,2
9	400,0
10	399,9

LE MODÈLE MATHÉMATIQUE

Le résultat de la mesure t_x est donnée par:

$$t_x \cong t_r + \Delta t_{tC} + \Delta t_{im} + \Delta t_{der} + \Delta t_{ind} + \Delta t_{res}$$

t_r : lecture de la température du thermocouple
Δt_{tC} : correction de la température de lecture du thermocouple en fonction de ses données d'étalonnage
Δt_{im} : correction de température due à une erreur d'immersion du thermocouple
Δt_{der} : correction de la température due à la dérive du thermocouple
Δt_{ind} : correction de température due à la déviation de l'indicateur de température
Δt_{res} : correction de température due à la résolution de l'indicateur de température

Evaluation de l'incertitude de mesure

$$u(t_x) \cong [u^2(t_r) + u^2(\Delta t_{tC}) + u^2(\Delta t_{im}) + u^2(\Delta t_{der}) + u^2(\Delta t_{ind}) + u^2(\Delta t_{res})]^{1/2}$$

$u(t_r)$: incertitude-type due à la lecture de la température du thermocouple
$u(\Delta t_{tC})$: incertitude-type due à correction de la température de lecture du thermocouple en fonction de ses données d'étalonnage
.$u(\Delta t_{im})$: incertitude-type due à une erreur d'immersion du thermocouple
$u(\Delta t_{der})$: incertitude-type due à la dérive du thermocouple
$u(\Delta t_{ind})$: incertitude-type due à la correction de température due à la déviation de l'indicateur de température
$u(\Delta t_{res})$: incertitude-type due à la résolution de l'indicateur de température

Les incertitudes de type A

L'Incertitude-type due à la lecture de la température du thermocouple $u(t_r)$:

$$\overline{T} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} T_i$$

$$s(T_i) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{K=1}^{n}(T_i - \overline{T})^2}$$

$$s(T_i) = 0{,}103\ °C$$

L'écart type de la moyenne : $s(\overline{T}) = \frac{s(T_i)}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}103\ °C}{\sqrt{10}} = 0{,}033\ °C$

L'incertitude-type de la correction du thermocouple $u(\Delta t_{tC})$

La correction pour la lecture du thermocouple est de 0,5 ° C. L'incertitude-type de la correction du thermocouple $u(\Delta t_{tC})$ est la suivante:

$$u(\Delta t_{tC}) = \frac{1{,}0}{2{,}0} = 0{,}5\ °C$$

L'incertitude-type due à la correction de température due à une erreur d'immersion du thermocouple $u(\Delta t_{im})$

La variation de température due à la variation du thermocouple est de ± 0.1 °C.

L'incertitude-type due aux fuites thermiques est :

$$u(\Delta t_{im}) = \frac{0,1}{\sqrt{3}} = 0,058\ °C$$

L'incertitude-type due à la dérive du thermocouple $u(\Delta t_{der})$

La limite d'incertitude de la dérive est de ± 0,2 ° C. En supposant une distribution rectangulaire, l'incertitude standard de la correction de dérive de thermocouple est :

$$u(\Delta t_{der}) = \frac{0,2}{\sqrt{3}} = 0,115\ °C$$

L'incertitude-type due à la correction de température due à la déviation de l'indicateur de température Δt_{ind}

D'après les spécifications, la limite d'incertitude du thermomètre numérique est de ± 0,6 ° C. En supposant une distribution rectangulaire, l'incertitude-type due à la correction de l'écart du thermomètre numérique est la suivante :

$$\Delta t_{ind} = \frac{0,6}{\sqrt{3}} = 0,346\ °C$$

L'incertitude-type due à la résolution de l'indicateur de température $u(\Delta t_{res})$

La demi-limite due à la résolution du thermomètre numérique est de 0,05 ° C. En supposant une distribution rectangulaire, l'incertitude standard de la correction de résolution du thermomètre numérique $u(\Delta t_{res})$ est la suivante:

$$u(\Delta t_{res}) = \frac{0,05}{\sqrt{3}} = 0,029\ °C$$

<u>Budget ou bilan d'incertitude</u>

Source d'incertitude	Symbol $U(x_i)$	Incertitude-type $u(x_i)$	Loi de probabilité	Coefficient de sensibilité C_i	Contribution en termes d'incertitude $u_i(y)=\lvert C_i \rvert \cdot u(x_i)$
Répétabilité de la lecture du thermocouple	$u(t_r)$	*0,033 °C*	Normale	*1*	*0,033 °C*
L'incertitude-type de la correction du thermocouple	$u(\Delta t_{tC})$	*0,5 °C*	Normale	*1*	*0,5 °C*
L'incertitude-type due aux fuites thermiques	$u(\Delta t_{im})$	*0,058 °C*	Rectangulaire	*1*	*0,058 °C*
L'incertitude-type due à la dérive du thermocouple	$u(\Delta t_{der})$	*0,115 °C*	Rectangulaire	*1*	*0,115 °C*
L'incertitude-type due à la correction de température suite à la déviation de l'indicateur de température	Δt_{ind}	*0,346 °C*	Rectangulaire	*1*	*0,346 °C*
L'incertitude-type due à la résolution de l'indicateur de température	$u(\Delta t_{res})$	*0,029 °C*	Rectangulaire	*1*	*0,029 °C*
Résultat =	*400,5 °C*				***u(y)=0,623 °C***

L'incertitude-type combinée de la mesure $u_c(t_x)$ est :

$$u_c(t_x) = \sqrt{0{,}033^2 + 0{,}5^2 + 0{,}058^2 + 0{,}115^2 + 0{,}346^2 + 0{,}029^2}$$

$$u_c(t_x) = 0{,}623\,°C$$

<u>Incertitude élargie :</u>

$U = kxu_c(t_x)$=2 x 0,623 °C = 1,3 °C

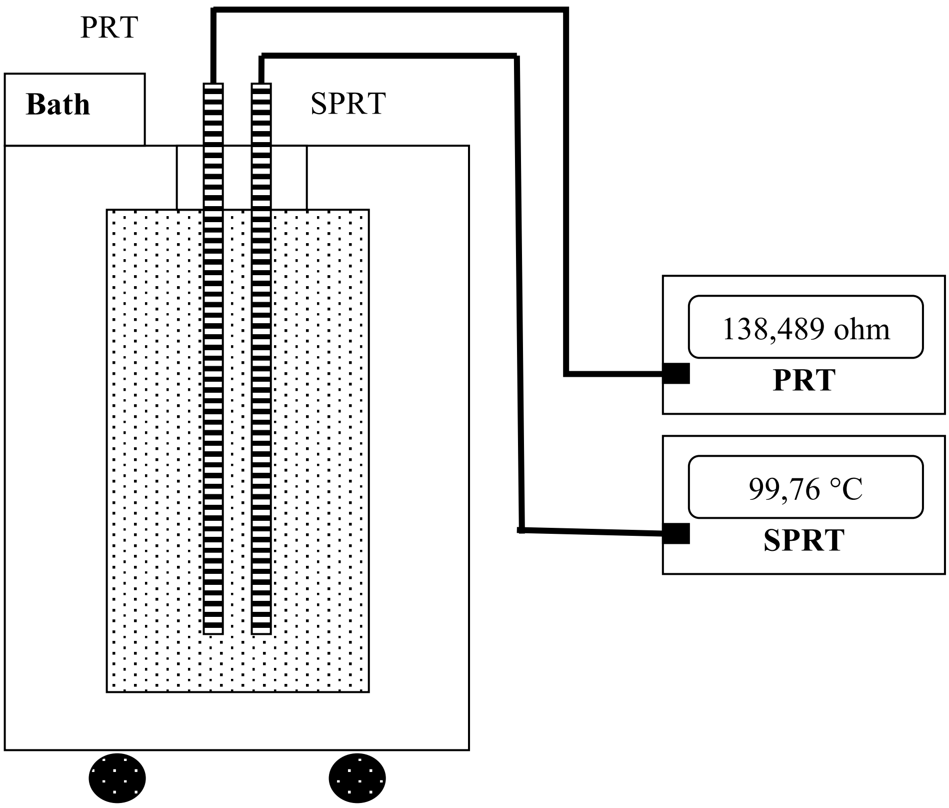
<u>Résultat de mesure :</u>

La température de la chambre après prise en compte de la correction du thermocouple est de 400,5 ° C. L'incertitude élargie d'étalonnage est de ± 1.3 °C, estimé à un niveau de confiance d'environ 95% avec un facteur de couverture k égal à 2.
Le résultat de la mesure de température de la chambre d'essai est de : 400,5 °C ± 1,3 °C. L'incertitude élargie est indiquée comme l'incertitude-type de mesure multipliée par le facteur d'élargissement k=2, qui pour une distribution normale correspond à une probabilité d'environ 95%.

EXEMPLE 5: ETALONNAGE D'UNE SONDE A RESISTANCE DE PLATINE

Un thermomètre semi-standard à résistance de platine (PRT) de 100 ohms a été étalonné par comparaison avec un thermomètre à résistance standard de 25 ohms (SPRT) traçable à l'échelle de température internationale 1990 (ITS-90).

Le schéma de principe de l'étalonnage de la sonde Pt100 est présenté ci-dessous.



Détermination de la température de la sonde à étalonner

La température d'étalonnage de la sonde à étalonner est déterminée par la température mesurée par un thermomètre étalon (SPRT) et par des corrections supplémentaires suivantes :

$$t_x = t_N + \delta t_{Kal} + \delta t_{Drift} + c_R\, \delta R_R + \delta t_{Br} + \delta t_{WaN} + \delta t_{EWN} + \delta t_{WAP} + \delta t_{Hom} + \delta t_{Stab}$$

avec

t_x température de la sonde à étalonner selon EIT-90

t_N valeur moyenne de la température du SPRT

δt_{Kal} correction due à l'incertitude d'étalonnage de la SPRT

δt_{Drift} correction due à une dérive possible de la sonde SPRT depuis son dernier étalonnage

δR_R correction due à l'incertitude d'étalonnage de la résistance étalon

δt_{Br} correction due à l'incertitude d'étalonnage du pont de mesure

δt_{WaN} correction due à une possible fuite thermique par le SPRT

δt_{EWN} correction due à l'auto-échauffement du SPRT

δt_{WAP} correction due à une possible fuite thermique par la sonde à étalonner

δt_{Hom} correction due à des inhomogénéités dans le milieu de comparaison

δt_{Stab} correction due à une raison d'instabilité temporelle dans le milieu de comparaison

c_R sensibilité du pont de mesure; dans la gamme choisie, c_R = 10 K/Ω peut être utilisé

Les corrections figurant dans cette liste sont dans la plupart des cas inconnues et vraisemblablement très faibles.

Les contributions ont été déterminées comme suit :

t_N valeur moyenne de la température du thermomètre étalon (SPRT):

t_N valeur moyenne de la température du thermomètre standard (SPRT): le pont de mesure calcule la température à partir des coefficients saisis de la fonction de déviation qui ont été déterminés lors de l'étalonnage, et calcule la valeur moyenne de dix mesures individuelles et l'écart type de cette valeur moyenne. Il en résulte une température moyenne de 180,234 ° C avec un écart type de la valeur moyenne de 1,2 mK.

$\delta t_{Kal.}$ correction due à l'incertitude d'étalonnage du SPRT: Selon le certificat d'étalonnage, l'incertitude d'étalonnage du SPRT à 180 ° C est de 15 mK (k = 2), donc l'incertitude-type d'étalonnage est de 7,5 mK.

δt_{Drift} correction due à une éventuelle dérive du thermomètre depuis le dernier étalonnage: L'historique connu du thermomètre permet de conclure que la dérive depuis le dernier étalonnage ne sera pas supérieure à ± 6 mK. Il en résulte une incertitude-type de dérive de $6\ \mathrm{mK}/\sqrt{3}$ = 3,5 mK.

δR_R correction due à l'incertitude de mesure lors de l'étalonnage de la résistance étalon: L'incertitude d'étalonnage relative de la résistance étalon est indiquée dans le certificat d'étalonnage sous la forme 3.10^{-6} (k = 2). Pour une valeur de résistance de la SPRT d'environ 43 Ω, cela correspond à une incertitude de 0,13 mΩ (k = 2) et à une incertitude-type de 0,07 mΩ. L'expérience a montré que la dérive de la résistance depuis le dernier étalonnage peut être négligée.

$\delta t_{Br.}$ correction due à l'incertitude du pont de mesure de résistance. Le certificat d'étalonnage indique pour la plage de mesure utilisée une incertitude élargie (k = 2) de 3 mK. L'indication du pont contient six chiffres, mais à l'interface avec l'acquisition des données, sept chiffres sont disponibles, sur lesquels une moyenne temporelle est effectuée. Ainsi, les incertitudes de mesure dues à la résolution limitée peuvent être négligées contrairement aux autres contributions à l'incertitude de mesure.

δt_{WaN} correction due à une possible fuite thermique au niveau de sonde SPRT: Le retrait du SPRT de 20 mm du bain a entraîné une variation de température de 2 mK (qui, en raison des variations de température du bain, n'a pu être estimée de manière imprécise). Il en résulte une incertitude-type de $2\ \mathrm{mK}/\sqrt{3}$ = 1,2 mK.

δt_{EWN} correction d'auto-échauffement du SPRT: le certificat d'étalonnage indique qu'un courant de mesure de 1 mA dans une cellule à triple point d'eau a entraîné un échauffement de 2,1 mK. Cette contribution est négligée par la suite, car le thermomètre est à la fois étalonné et utilisé avec un courant de mesure de 1 mA.

δt_{WAP} correction due à une possible fuite thermique au niveau de la sonde à étalonner: extraction de la sonde à étalonner de 20 mm du bain a provoqué une variation de température de 1 mK, mesurée avec pont de mesure. Cette contribution est négligée. Dans la plupart des exemples, il n'aurait pas été possible de détecter un effet en raison de la faible résolution des éléments d'étalonnage.

t_{Hom} correction due à des inhomogénéités dans le milieu de comparaison: des évaluation précédentes du milieu de comparaison ont montré que la différence de température entre la sonde à étalonner et le thermomètre étalon due à des inhomogénéités dans le bain pouvait atteindre au maximum ± 8 mK. Il en résulte une incertitude-type de $8\ \mathrm{mK}/\sqrt{3}$ = 4,6 mK.

δt_{Stab} correction due aux instabilités temporelles dans le millieu de comparaison: il a été démontré par des évaluations antérieures que la stabilité du thermomètre étalon a engendré une instabilité temporelle pouvant atteindre au plus ± 6 mK. Il en résulte une incertitude-type de $6\ \mathrm{mK}/\sqrt{3}$ = 3,5 mK.

Les contributions individuelles à l'incertitude de la température de la sonde à étalonner sont résumées ci-dessous :

Quantité	Brève description	Estimation	Incertitude-type $u(x_i)$	Loi de probabilité	Coefficient de sensibilité C_i	Contribution en terme d'incertitude $u_i(y)=\lvert C_i\rvert \cdot u(x_i)$
t_N	Dispersion des mesures de la SPRT	180.234 °C	1.2 mK	normale	1	1.2 mK
δtKal	Etalonnage - SPRT	0 K	7.5 mK	normale	1	7.5 mK
δtDrift	Dérive de la sonde étalon-SPRT	0 K	3.5 mK	rectan-gulaire	1	3.5 mK
δR_R	Résistance étalon	0 Ω	0.07 mΩ	normale	10 K/Ω	0.7 mK
δt_{Br}	Pont de mesure	0 K	1.5 mK	normale	1	1.5 mK
δtWaN	Fuites thermiques - SPRT	0 K	1.2 mK	rectan-gulaire	1	1.2 mK
δtHom	Homogeneité du milieu de comparaison	0 K	4.6 mK	rectan-gulaire	1	4.6 mK
δtStab	Stabilité du milieu de comparaison	0 K	3.5 mK	rectan-gulaire	1	3.5 mK
t_x	Température de la sonde à étalonner	180.234 °C	10 mK			

Table : Incertitude sur la température de la sonde à étalonner

L'étalonnage du thermomètre à résistance de platine à l'aide d'un ohmmètre

À la température t_x, la résistance de la sonde à étalonner (Pt100) est mesurée. La mesure de la résistance de la sonde à étalonner est effectuée avec un instrument de mesure de la résistance étalonné à cinq chiffres (ohmmètre) pour lequel un certificat d'étalonnage est disponible.

Le modèle de cette mesure se présente comme suit :

$$R(t_x) = R_W + \delta R_{Ohm} + \delta R_{Drift} + \delta R_{Auf} + \delta R_{Par} + c_t \cdot \delta T + \delta R_{Hys}$$

Avec

R_W indication de l'ohmmètre

δR_{Ohm} correction due à l'incertitude d'étalonnage de l'ohmmètre

δR_{Drift} correction due à la dérive de l'ohmmètre depuis son dernier étalonnage

δR_{Auf} correction due à la résolution de l'ohmmètre

δR_{Par} correction due aux tensions thermiques parasites

δT correction due à l'incertitude de la température de la sonde à étalonner

c_t sensibilité du thermomètre, 0.4 Ω/K

R_W indication de l'ohmmètre : l'ohmmètre affiche une valeur de 168,43 Ω. L'écart-type de la valeur moyenne de plusieurs mesures est déterminée comme étant de 0,005 Ω.

δR_{Ohm} correction due à l'incertitude d'étalonnage de l'ohmmètre: selon le certificat d'étalonnage, l'incertitude de mesure de l'ohmmètre est de 0,020 Ω (k = 2) et l'incertitude-type est donc de 10 mΩ

δR_{Drift} correction due à la dérive de l'ohmmètre depuis le dernier étalonnage: En raison de l'historique connu de l'ohmmètre, il est garanti que la dérive depuis le dernier étalonnage est de ± 20 mΩ au maximum. Il en résulte une incertitude standard de $20\ \text{m}\Omega/\sqrt{3}$ = 11,5 mΩ.

δR_{Auf} correction due à la résolution de l'ohmmètre: La résolution de l'ohmmètre de 0,01 Ω permet une lecture à l'intérieur de ± 0,005 Ω. Il en découle une incertitude-type de $5\ \text{m}\Omega/\sqrt{3}$= 2,9 mΩ.

δR_{Par} Correction due à des tensions thermiques parasites. L'influence des tensions thermiques parasites a été déterminée par inversion de l'ohmmètre. En raison des limites de la résolution de l'ohmmètre, un effet n'a pas pu être détecté et peut donc être négligé.

Δt correction due à l'incertitude de la sonde à étalonner : Dans le tableau ci-dessus, l'incertitude de la température de la sonde à étalonner a été déterminée et vaut : 10,3 mK.

δR_{Hys} correction due aux effets d'hystérésis: Deux mesures ont été effectuées. Pour une mesure, le thermomètre était auparavant dans un bain de sel à 250 ° C et pour l'autre mesure à 0 ° C. Les résultats ont différé de 22 mΩ. Il en résulte une contribution à l'incertitude de mesure de $22\ \text{m}\Omega/2\sqrt{3}$= 6,4 mΩ.

Ces contributions en termes d'incertitude de mesure sont résumées au tableau ci-dessous :
Incertitude de mesure de la résistance de la sonde à étalonner.

Quantité	Brève description	Estimation	Incertitude-type $u(x_i)$	Loi de probabilité	Coefficient de sensibilité C_i	Contribution en termes d'incertitude $u_i(y)=\|C_i\| \cdot u(x_i)$
R_W	Lecture de ohmmetre	168.43 Ω	5 mΩ	normale	1	5 mΩ
δR_{Ohm}	Etalonnage de ohmmetre	0 Ω	10 mΩ	normale	1	10.0 mΩ
δR_{Drift}	Dérive - ohmmetre	0 Ω	11.5 mΩ	rectan-gulaire	1	11.5 mΩ
δR_{Auf}	Resolution de ohmmetre	0 Ω	2.9 mΩ	rectan-gulaire	1	2.9 mΩ
δR_{Hys}	Effet d'hysteresis	0 Ω	6.4 mΩ	rectan-gulaire	1	6.4 mΩ
δT	Température de la sonde à étalonner	0 K	10.3 mK	normale	0.4 Ω/K	4.1 mΩ
$R(t_x)$		168.43 Ω	18.0 mΩ			
$R(t_x)$					k=2	33.6 mΩ

Résultat de mesure : La résistance de l'IPRT à la température de 180,234 ° C est de 168,43 Ω. L'incertitude de mesure est 0.04 Ω. Cela correspond à une incertitude de mesure de la température de 0,09 ° C.

L'incertitude indiquée est l'incertitude élargie obtenue à partir de l'incertitude-type, multipliée par le facteur de dilatation k=2. La valeur de la grandeur à mesurer est avec une probabilité de 95% dans l'intervalle des valeurs attribuées.

EXEMPLE 6: ETALONNAGE D'UN POIDS DE VALEUR NOMINALE 10 KG

L'étalonnage d'un poids de valeur nominale de 10 kg de classe OIML M1 s'effectue par comparaison à un étalon de référence (classe OIML F2) de même valeur nominale à l'aide d'un comparateur de masse dont les caractéristiques de performance ont déjà été déterminées.

La masse conventionnelle inconnue m_x est obtenue à partir de:

$$m_x = m_S + \delta m_D + \delta m + \delta m + \delta m_C + \delta B$$

Où:

m_S masse conventionnelle de l'étalon de référence,
δm_D dérive de la valeur de l'étalon depuis son dernier étalonnage,
δm différence observée de masse entre la masse inconnue et l'étalon,
δm_C correction due à l'excentricité et aux effets magnétiques,
δB correction de la poussée de l'air.

L'étalon de référence (m_S) : Le certificat d'étalonnage pour l'étalon de référence donne une valeur de 10 000,005 g avec une incertitude élargie associée de **45 mg** (avec un facteur d'élargissement de k=2).

La déviation de la valeur de l'étalon de référence (m_D) : La dérive de la valeur de l'étalon de référence est estimée à partir des étalonnages antérieurs et se trouvent dans les limites de **± 15 mg**.

Le comparateur ($\delta m, \delta m_C$) : résolution du comparateur = 0,005 g, Une évaluation préalable de la répétabilité de la différence de masse entre deux poids de la même valeur nominale donne une estimation commune de l'écart-type de **25 mg**. Aucune correction n'est appliquée pour le comparateur, alors que les variations dues à l'excentricité et aux effets magnétiques sont estimées à des limites $\pm \mathbf{10}\boldsymbol{mg}$ avec une loi de distribution rectangulaire.

La poussée de l'air (δB) : Aucune correction n'est effectuée pour les effets de la poussée de l'air, les limites d'écart sont estimées à **± 1x10^{-6}** de la valeur nominale.

Corrélation : Aucune des grandeurs d'entrée n'est considérée comme corrélée de manière significative.

Mesures réalisées : Trois observations de la différence de masse entre la masse inconnue et la norme sont obtenues en utilisant la méthode de substitution et le schéma de substitution ABBA ABBA ABBA:

N°	Mass conventionnelle		lecture		Différence mesurée
1	Etalon (E_1)		+0,010g		+0,01g
	Masse (M_1)		+0,020g		
	Masse (M_2)		+0,025g		
	Etalon (E_2)		+0,015g		
2	Etalon (E_1)		+0,025g		+0,03g
	Masse (M_1)		+0,050g		
	Masse (M_2)		+0,055g		
	Etalon (E_2)		+0,020g		
3	Etalon (E_1)		+0,025g		+0,02g
	Masse (M_1)		+0,045g		
	Masse (M_2)		+0,040g		
	Etalon (E_2)		+0,020g		

Moyenne arithmétique: $\overline{\delta m}$ = 0,020 g

Estimation de l'écart-type (Obtenu à partir de l'évaluation préalable) :

$$S_p(\delta m) = 25mg$$

Incertitude-type de répétabilité :

$$u(\delta m) = u(\overline{\delta m}) = \frac{25mg}{\sqrt{3}} = 14{,}4\ mg$$

Budget ou bilan d'incertitude

Grandeur d'entrée X_i	Estimation x_i	Incertitude-type $u(x_i)$	Loi de probabilité	Coefficient de sensibilité C_i	Contribution en termes d'incertitude $u_i(y)=\|C_i\| \cdot u(x_i)$
m_S	*10 000,005 g*	*22,5 mg*		*1*	*22,5 mg*
δm_D	*0,000 g*	*8,66 mg*		*1*	*8,66 mg*
δm	*0,020 g*	*14,4 mg*		*1*	*14,4 mg*
δm_C	*0,000 g*	*5,77 mg*		*1*	*5,77 mg*
δB	*0,000 g*	*5,77 mg*		*1*	*5,77 mg*
m_x	*10 000,025 g*				*u(y)=29,3 mg*

Incertitude élargie :

U=kxu(m_x)=2x29,3mg= 59 mg

Résultat de mesure :

Le résultat de mesure de la masse de masse nominale 10 kg est de : 10 000 025 kg ± 59 mg. L'incertitude élargie est indiquée comme l'incertitude-type de mesure multipliée par le facteur d'élargissement k = 2, qui pour une distribution normale correspond à une probabilité d'environ 95%.

EXEMPLE 7: MESURE DE LA RESISTANCE ET DE LA REACTANCE D'UN CIRCUIT (CAS DE VARIABLES COROLEES)

On détermine la résistance R et la réactance X d'un élément de circuit par la mesure de l'amplitude V d'une différence de potentiel sinusoïdale entre ses bornes, de l'intensité I du courant alternatif qui le traverse et du déphasage φ entre la différence de potentiel alternative et le courant alternatif.

Il en résulte que les trois grandeurs d'entrée sont V, I, et φ et que les trois grandeurs de sortie sont les trois composantes de l'impédance R, X, et Z.

Les mesurandes sont reliés aux grandeurs d'entrée par la loi d'ohm :

$$R = \frac{V}{I} cos\varphi$$

$$X = \frac{V}{I} sin\varphi$$

$$Z = \frac{V}{I}$$

.

$$s(\bar{q}, \bar{r}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (q_k - \bar{q})(r_k - \bar{r})$$

Et

$$r(x_i, x_j) = r(\bar{X}_i, \bar{X}_j) = s(\bar{X}_i, \bar{X}_j)/[s(\bar{X}_i)s(\bar{X}_j)]$$

Valeurs des grandeurs d'entrée V,I, et φ obtenu à partir de cinq ensembles d'observations simultanées

Numéro de l'ensemble Grandeurs d'entrée k	**Grandeurs d'entrée**		
	V (V)	I (mA)	ϕ (rad)
1	5,007	19,663	1,0456
2	4,994	19,639	1,0438
3	5,005	19,640	1,0468
4	4,990	19,685	1,0428
5	4,999	19,678	1,0433
Moyenne arithmétique	$\bar{V}$= 4,999 0	$\bar{I}$= 19,661 0	φ= 1,044 46
Écart-type expérimental de la moyenne	$s(\bar{V})$= 0,003 2	$s(\bar{I})$= 0,009 5 5	$s(\bar{\varphi})$= 0,000 75
Coefficients de corrélation			
$r(V,I) = -0{,}36$			
$r(V,\varphi) = 0{,}86$			
$r(I,\varphi) = -0{,}65$			

Valeurs calculées des grandeurs de sortie R, X et Z :

Numéro de l'ensemble Grandeurs d'entrée k	**Valeurs individuelles des mesurandes**		
	$R = (V/I)$ cos ϕ (Ω)	$X = (V/I)$ sin ϕ (Ω)	$Z = V/I$ (Ω)
1	127,67	220,32	254,64
2	127,89	219,79	254,29
3	127,51	220,64	254,84
4	127,71	218,97	253,49
5	127,88	219,51	254,04

Moyenne arithmétique	$R = 127{,}732$	$X = 219{,}847$	$Z = 254{,}260$
Écart-type expérimental de la moyenne	$s(R) = 0{,}071$	$s(X) = 0{,}295$	$s(Z) = 0{,}236$
Coefficients de corrélation			
$r(R, X) = -0{,}588$			
$r(R, Z) = -0{,}485$			
$r(X, Z) = 0{,}993$			

Les valeurs des trois mesurandes R, X et Z sont obtenues à partir des relations données dans l'Équation en utilisant les valeurs moyennes $\bar{V}$, $\bar{I}$ et $\bar{\varphi}$.

$R = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} cos\bar{\varphi}$	$X = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} sin\bar{\varphi}$	$Z = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$

En appliquant la loi de propagation des incertitudes pour des variables corrélées :

$$u_C^2(Z) = \left(\frac{1}{\bar{I}}\right)^2 . u^2(\bar{V}) + \left(\frac{\bar{V}}{\bar{I}^2}\right)^2 . u^2(\bar{I}) + 2\left(\frac{1}{\bar{I}}\right)\left(-\frac{\bar{V}}{\bar{I}^2}\right) u(\bar{V})u(\bar{I})r(\bar{V},\bar{I})$$

$$u_C^2(Z) = Z^2\left[\frac{u(\bar{V})}{\bar{V}}\right]^2 + Z^2\left[\frac{u(\bar{I})}{\bar{I}}\right]^2 - 2Z^2\left[\frac{u(\bar{V})}{\bar{V}}\right]\left[\frac{u(\bar{I})}{I}\right] r(\bar{V},\bar{I})$$

$$u_{C,r}^2(\bar{Z}) = u_r^2(\bar{V}) + u_r^2(\bar{I}) - 2u_r(\bar{V})u_r(\bar{I})r(\bar{V},\bar{I})$$

$$u_{C,r}^2(\bar{Z}) = 0{,}236\ \Omega$$

Valeurs calculées des grandeurs de sortie R, X et Z à partir des valeurs moyennes :

Indice du mesurande l	**Relation entre l'estimation du mesurande y_l et les estimations d'entrée** x_i	**Valeur de l'estimation y_l (résultat de mesure)**	**Incertitude-type composée $u_c(y_l)$ du résultat de mesure**
1	$R = (V/I) \cos \phi$	$R = 127{,}732\ \Omega$	$u_c(R) = 0{,}071\ \Omega$ $u_c(R)/R = 0{,}06 x 10^{-2}$
2	$X = (V/I) \sin \phi$	$X = 219{,}847\ \Omega$	$u_c(X) = 0{,}295\ \Omega$ $u_c(X)/X = 0{,}13 x 10^{-2}$
3	$Z = V/I$	$Z = 254{,}260\ \Omega$	$u_c(Z) = 0{,}236\ \Omega$ $u_c(Z)/Z = 0{,}09 x 10^{-2}$

PROGRAMME SYSTÈME QUALITÉ DE L'AFRIQUE DE L'OUEST (PSQAO)
APPUI À LA MISE EN ŒUVRE DE LA POLITIQUE QUALITÉ DE LA CEDEAO (ECOQUAL)
FINANCÉ PAR L'UNION EUROPÉENNE
EXÉCUTÉ PAR L'ONUDI

Union Européenne

Département du commerce, des investissements et de l'innovation (TII)

Centre international de Vienne B.P. 300, 1400 Vienne, Autriche

Email: tii@unido.org

www.unido.org

Programme Système Qualité de l'Afrique de l'Ouest

ECOWAS Building River Mall & Plaza Central Area, Abuja FCT Nigeria

Email: contact@ecowaq.org

www.ecowaq.org

EXÉCUTÉ PAR

ORGANISATION DES NATIONS UNIES POUR LE DÉVELOPPEMENT INDUSTRIEL